



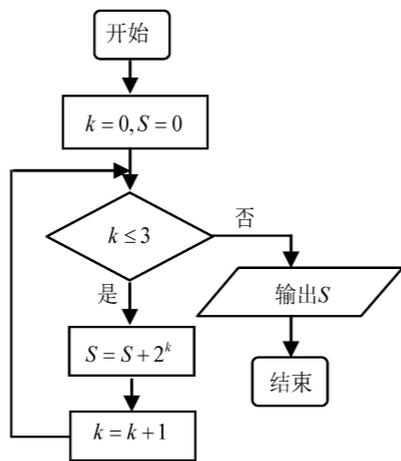
精华学校 2018—2019 学年全日制零模考试
数学（理科）测试卷

满分 150 分，考试时长 120 分钟

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）。

- 复数 $z = \frac{1}{i}$ 在复平面内对应的点的坐标为 ()
A. (0, -1) B. (0, 1) C. (-1, 0) D. (1, 0)
- $\sin 3$ 的取值所在的范围是 ()
A. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ C. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ D. $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
- 在极坐标系中，圆 $\rho = 2\cos\theta$ 的半径为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4
- 执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为 ()
A. 1 B. 3 C. 7 D. 15



- 已知直线 $l_1: ax + y = 1$ 和直线 $l_2: 4x + ay = 2$ ，则“ $a + 2 = 0$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_n a_{n+1} = 2^n$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项的和为 ()
A. $3 \times 2^{11} - 3$ B. $3 \times 2^{11} - 1$ C. $3 \times 2^{10} - 2$ D. $3 \times 2^{10} - 3$

7. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 是夹角为 60° 的单位向量. 当实数 $\lambda \leq -1$ 时, 向量 \vec{a} 与向量 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 的夹角范围是 ()

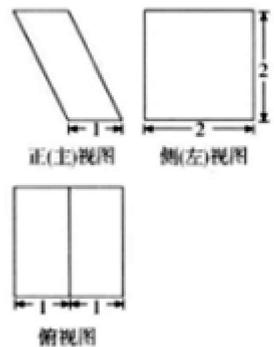
- A. $[0^\circ, 60^\circ)$ B. $[60^\circ, 120^\circ)$
C. $[120^\circ, 180^\circ)$ D. $[60^\circ, 180^\circ)$

8. 已知 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2019}$ 均为大于 0 的实数, 且 $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_{2019}} = 1$, 则

- 下列表述错误的为 ()
A. 最多有 1 个 x_i 小于 1
B. 最多有 2 个 x_i 小于 2
C. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2019}$ 中的最大值不小于 2019
D. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2019}$ 中的最大值不小于 2018

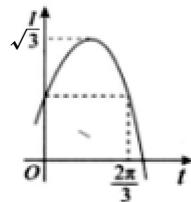
二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）。

- 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为_____.
- 已知 $(2x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_0 + a_1 =$ _____.
- 已知函数 $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = \frac{3}{4}x - 1$, 则函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数是_____.
- 某四棱柱的三视图如图所示, 该几何体的各面中互相垂直的面的对数是_____.



13. 已知函数 $y = ae^x$ (其中 $a > 0$) 经过不等式组 $\begin{cases} x < 0 \\ x - y + 1 > 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域, 则实数 a 的取值范围是_____.

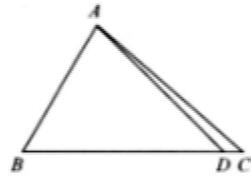
14. 已知两个电流瞬时值的函数表达式为 $I_1(t) = \sin t$, $I_2(t) = \sin(t + \varphi)$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 它们合成后的电流瞬时值的函数 $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$ 的部分图象如图所示, 则 $I(t) =$ _____, $\varphi =$ _____.





三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. (本小题满分 13 分) 如图，在锐角三角形 ABC 中， $AB=2$ ，点 D 在 BC 边上，且 $AD=\sqrt{6}$ ， $\angle ADC=135^\circ$ 。



- (I) 求角 B 的大小；
(II) 若 $AC=\sqrt{7}$ ，求边 BC 的长。

16. (本小题满分 13 分) 超市某种绿色食品，过去 20 个月该食品的月市场需求量 x (单位: kg, $100 \leq x \leq 150$) 即每月销售的数据记录如下:

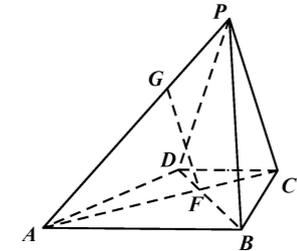
137 108 114 121 115 135 122 140 128 139
125 140 130 125 105 115 133 124 149 115

对这 20 个数据按组距 10 进行分组，并统计整理，绘制了如下尚不完整的统计图表:

组别	月市场需求量分组	频数
A	$100 \leq x < 110$	2
B	$110 \leq x < 120$	m
C	$120 \leq x < 130$	6
D	$130 \leq x < 140$	5
E	$140 \leq x \leq 150$	n

- (I) 写出 m, n 的值. 若视 x 分布在各区间内的频率为相应的概率，试计算 $P(x \geq 130)$ ；
(II) 记 B 组月市场需求量数据的平均数与方差分别为 v_1, s_1^2 ， E 组月市场需求量数据的平均数与方差分别为 v_2, s_2^2 ，试分别比较 v_1 与 v_2, s_1^2 与 s_2^2 的大小；(只需写出结论)
(III) 为保证该绿色产品的质量，超市规定该产品仅在每月一日上架销售，每月最后一日对所有未售出的产品进行下架处理. 若超市每售出 1 kg 该绿色食品可获利润 5 元，未售出的食品每 kg 亏损 3 元，并且超市为下一个月采购了 130 kg 该绿色食品，求超市下一个月销售该绿色食品的利润 Q 的分布列及数学期望 $E(Q)$. (以分组的区间中点值代表该组的各个值，并以月市场需求量落入该区间的频率作为月市场需求量取该组区间中点值的概率)

17. (本小题满分 14 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是梯形， $DC \parallel AB, AB=BC=2DC=4, \angle ABC=90^\circ$ ， BD 与 AC 交于点 F ，平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD=PC$ ，点 G 是 AP 上一点，且 $AG=2GP$ 。



- (I) 求证: $GF \parallel$ 平面 PBC ；
(II) 若二面角 $P-AB-C$ 为 45° ，
① 求直线 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值；
② 在棱 PB 上是否存在一点 S ，使得平面 $SDC \perp$ 平面 PAB ？若存在，求出 CS 的长度；若不存在，说明理由。

18. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ 。

- (I) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；
(III) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，求 a 范围。

19. (本小题满分 14 分) 已知椭圆 C_1 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ ，且其右顶点与椭圆 $C_2: x^2 + 2y^2 = 4$ 的右焦点重合。

- (I) 求椭圆 C_1 的标准方程；
(II) 设 O 为原点，若点 A 在椭圆 C_1 上，点 B 在椭圆 C_2 上，且 $OA \perp OB$ ，试判断直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的位置关系，并证明你的结论。

20. (本小题满分 13 分) 已知无穷整数数集 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ ($a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$) 具有性质 P : 对任意互不相等的正整数 i, j, k ，总有 $a_i + |a_k - a_j| \in A$ 。

- (I) 若 $\{1, 2\} \subseteq A$ 且 $5 \notin A$ ，判断 13 是否属于 A ，并说明理由；
(II) 求证: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 是等差数列；
(III) 已知 $x, y \in \mathbb{N}$ 且 $y > x > 0$ ，记 M 是满足 $\{0, x, y\} \subseteq A$ 的数集 A 中的一个，且是满足 $\{0, x, y\} \subseteq A$ 的所有数集 A 的子集，求证: x, y 互质是 $M = \mathbb{N}$ 的充要条件。

精华学校高三年级第二学期第三次月考答案

数学（理科） 2019.3

阅卷须知:

- 1.评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数。
- 2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	B	D	C	D	B	C

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 2	10. 11	11. 2
12. 8	13. $a > 1$	14. $\sqrt{3} \sin(t + \frac{\pi}{6}), \frac{\pi}{3}$

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)

15.

15. (本小题 13 分)

解:(I) 因为 $\angle ADC = 135^\circ$,

所以 $\angle ADB = 45^\circ$ 1 分

由正弦定理可得 $\frac{AD}{\sin E} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$, 3 分

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{6} \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 5 分

在锐角三角形 ABC 中 $B = 60^\circ$ 7 分

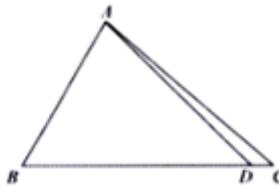
(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$, 9 分

即 $7 = 4 + BC^2 - 4 \cdot BC \cos 60^\circ$.

整理得, $BC^2 - 2BC - 3 = 0$, 11 分

解得 $BC = 3$ 13 分



16. (I) $m = 4, n = 3$ 2 分

$P(x \geq 130) = P(130 \leq x < 140) + P(140 \leq x \leq 150) = \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$ 4 分

(II) $v_1 < v_2, s_1^2 < s_2^2$; 6 分

(III) 由题意可知: 利润 $Q = \begin{cases} 5x - 3(130 - x) & 100 \leq x < 130 \\ 650 & 130 \leq x \leq 150 \end{cases}$

当 $x = 105$ 时, $Q = 5 \times 105 - 3 \times (130 - 105) = 450$;

当 $x = 115$ 时, $Q = 5 \times 115 - 3 \times (130 - 115) = 530$;

当 $x = 125$ 时, $Q = 5 \times 125 - 3 \times (130 - 125) = 610$;

当 $x \geq 135$ 时, $Q = 5 \times 130 = 650$8 分

所以 Q 的可能取值为 450, 530, 610, 650,9 分

分

$$P(Q = 450) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}; \quad P(Q = 530) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};$$

$$P(Q = 610) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}; \quad P(Q = 650) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以 Q 的分布列为

Q	450	530	610	650
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

所以 $E(Q) = 450 \times \frac{1}{10} + 530 \times \frac{2}{10} + 610 \times \frac{3}{10} + 650 \times \frac{4}{10} = 594$ (元)13 分

分

17. 解: (I) 因为 $DC \parallel AB$,

$$\text{所以 } \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{DC} = 2 = \frac{AG}{GP},$$

所以 $GF \parallel PC$ 1 分

因为 $GF \not\subset$ 平面 PBC , $PC \subset$ 平面 PBC , 2 分

所以 $GF \parallel$ 平面 PBC 3 分

(II) 取 DC 中点 O , 并在平面 $ABCD$ 内作 DC 的垂线 Ox . 连结 OP .

因为 $PD = PC$, 所以 $PO \perp DC$. 又因为平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 Ox, OP, OC 两两垂直. 4 分

以 O 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 如图.

设 $OP = a (a > 0)$, 则: $O(0,0,0), A(4,-3,0), B(4,1,0), C(0,1,0), D(0,-1,0), P(0,0,a)$

① 平面 ABC 一个法向量为 $n = (0,0,1)$ 5 分

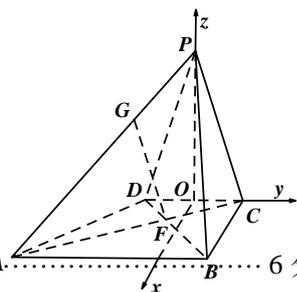
设平面 PAB 的法向量为 $m = (x,y,z)$, 则

$\mathbf{m} \perp \overline{BA}$, $\mathbf{m} \perp \overline{BP}$.

$\therefore \overline{BA} = (0, -4, 0)$, $\overline{BP} = (-4, -1, a)$

$\therefore \begin{cases} 4y = 0 \\ -4x - y + az = 0 \end{cases}$, 解得 $y = 0, z = \frac{4}{a}x$.

令 $x = a$, 则 $y = 0, z = 4$, 即 $\mathbf{m} = (a, 0, 4)$ 6分



则 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + 16}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a^2 = 16$,

又因为 $a > 0$, 所以 $a = 4$, $P(0, 0, 4)$ 8分

所以, $\overline{PC} = (0, 1, -4)$, $\mathbf{m} = (4, 0, 4)$

$\cos \langle \overline{PC}, \mathbf{m} \rangle = \frac{-16}{\sqrt{17}\sqrt{16+16}} = -\frac{2\sqrt{34}}{17}$

设 PC 与平面 PAB 所成角为 θ , 因为 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

所以 $\sin \theta = |\cos \langle \overline{PC}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{2\sqrt{34}}{17}$ 10分

②假设存在满足条件的 S 点, 设 $\overline{PS} = \lambda \overline{PB} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则

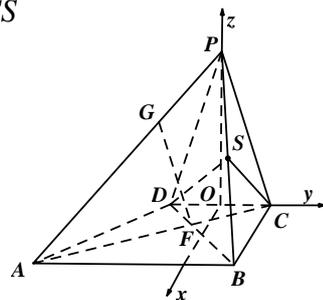
$\overline{CS} = \overline{CP} + \overline{PS} = \overline{CP} + \lambda \overline{PB} = (0, -1, 4) + \lambda(4, 1, -4) = (4\lambda, \lambda - 1, 4 - 4\lambda)$ 11分

设平面 SDC 的法向量为 $\mathbf{b} = (x, y, z)$, 则 $\mathbf{b} \perp \overline{DC}$, $\mathbf{b} \perp \overline{CS}$

又因为 $\overline{DC} = (0, 4, 0)$

所以 $\begin{cases} 4y = 0 \\ 4\lambda x + (\lambda - 1)y + (4 - 4\lambda)z = 0 \end{cases}$,

解得 $y = 0, \lambda x = (\lambda - 1)z$.



令 $z = \lambda, x = \lambda - 1$, 则 $\mathbf{b} = (\lambda - 1, 0, \lambda)$ 12分

由平面 $SDC \perp$ 平面 PAB 知: $\mathbf{b} \perp \mathbf{m}$.

所以 $4(\lambda - 1) + 4\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2} \in [0, 1]$.

所以存在满足条件的 S 点, 且 S 点为 PB 中点 13分

此时 S 点坐标为 $(2, \frac{1}{2}, 2)$ ，则 $CS = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{33}}{2}$ 14 分

18 解：(I) 当 $a=1$ 时， $f(x) = x^2 e^x$ ，

$$f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2) e^x$$

$f'(1) = 3e$ ， $f(1) = e$ ，故切线方程为 $y - e = 3e(x - 1)$ ，即 $3ex - y - 2e = 0$...4 分

(II) $f'(x) = (x^2)' e^{ax} + x^2 (e^{ax})' = 2x e^{ax} + ax^2 e^{ax} = x(ax + 2) e^{ax}$...5 分

(1) 当 $a=0$ 时， $f'(x) = 2x$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，

单调增区间为 $(0, +\infty)$ ，单调减区间为 $(-\infty, 0)$...6 分

当 $a \neq 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = -\frac{2}{a}$...7 分

(2) 当 $a > 0$ 时， $0 > -\frac{2}{a}$ ，

当 $x < -\frac{2}{a}$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $-\frac{2}{a} < x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，

单调增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ ， $(0, +\infty)$ ，单调减区间为 $(-\frac{2}{a}, 0)$...9 分

(3) 当 $a < 0$ 时， $0 < -\frac{2}{a}$ ，当 $x > -\frac{2}{a}$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $0 < x < -\frac{2}{a}$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，

$\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $(0, -\frac{2}{a})$ ，单调减区间是 $(-\infty, 0)$ ， $(-\frac{2}{a}, +\infty)$...11 分

综上：当 $a=0$ 时，单调增区间为 $(0, +\infty)$ ，单调减区间为 $(-\infty, 0)$

当 $a > 0$ 时，单调增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ ， $(0, +\infty)$ ，单调减区间为 $(-\frac{2}{a}, 0)$

当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, -\frac{2}{a})$ ，单调减区间是 $(-\infty, 0)$ ， $(-\frac{2}{a}, +\infty)$

(III) 由 (II) 知，当 $a \geq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，满足条件； 12 分

当 $a < 0$ 时，单调增区间为 $(0, -\frac{2}{a})$ 与 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增不符...13 分

综上： $a \geq 0$

19.

解:(I)因为椭圆 $C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点为 $(\sqrt{2}, 0)$,

所以可设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 2分

因为椭圆 C_1 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$,

所以 $\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2} = 1$, 所以椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$ 4分

(II)结论:直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切. 5分

设原点到直线 AB 的距离为 d ,

①若 OA 斜率不存在, 则 $A(0, \pm \frac{2}{\sqrt{3}}), B(\pm 2, 0)$,

此时, $|AB| = \frac{4}{\sqrt{3}}, d = 1$; 6分

②若 OA 斜率存在, 由已知 $OA \perp OB$, 可设 $OA: y = kx, OB: ky = -x$ 7分

由 $\begin{cases} y = kx, \\ 2x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$ 可得 $x_A^2 = \frac{4}{3k^2 + 2}, y_A^2 = \frac{4k^2}{3k^2 + 2}$; 8分

由 $\begin{cases} ky = -x, \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$ 可得 $y_B^2 = \frac{4}{k^2 + 2}, x_B^2 = \frac{4k^2}{k^2 + 2}$ 9分

$|OA|^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{4k^2 + 4}{3k^2 + 2}, |OB|^2 = x_B^2 + y_B^2 = \frac{4k^2 + 4}{k^2 + 2}$ 11分

$\frac{1}{d^2} = \frac{|AB|^2}{|OA|^2 |OB|^2} = \frac{|OA|^2 + |OB|^2}{|OA|^2 |OB|^2} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{3k^2 + 2}{4k^2 + 4} + \frac{k^2 + 2}{4k^2 + 4} = 1$.

即 $d = 1$ 13分

综上, 直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切. 14分

20.

解:(I)判断结论: $13 \notin A$ 1分

假设 $13 \in A$, 则由性质 P 可得 $1 + |21 - 13| = 9 \in A$,

再由性质 P 可推得 $1 + |13 - 9| = 5 \in A$,

这与已知 $5 \notin A$ 矛盾, 所以 $13 \notin A$ 3 分

(II) 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^+$, 由性质 P 可得 $a_n + |a_{n+1} - a_{n+2}| \in A$,

又因为 $a_n < a_{n+1} < a_{n+2}$,

所以 $a_n + a_{n+2} - a_{n+1} \in A$, 且 $a_n < a_n + a_{n+2} - a_{n+1} < a_{n+2}$,

所以 $a_n + a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1}$, 即 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$,

所以对于任意 $n \in \mathbf{N}^+$, 都有 $a_{n+1} - a_n = \dots = a_2 - a_1$,

所以 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 是等差数列. 8 分

(III) 设数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 的公差为 d , 由已知可得 $d \in \mathbf{Z}$.

设 $a_i = 0, a_j = x, a_k = y$, 其中 $i < j < k$,

则有 $y = (k - i)d, x = (j - i)d$.

首先证明: x, y 互质是 $M = \mathbf{N}$ 的充分条件.

因为 x, y 互质, 所以 $d = 1$.

因为 M 是所有满足 $\{0, x, y\} \subseteq A$ 的数集 A 的子集, 所以 $M = \mathbf{N}$.

其次证明: x, y 互质是 $M = \mathbf{N}$ 的必要条件.

假设 x, y 不互质, 则 x, y 有大于 1 的因数 p ,

所以满足条件的集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ 中的元素所构成的数列 $a_1, a_2,$

a_3, \dots, a_n, \dots 的公差 d 可以取 1, 也可以取 p , 此时, 集合 $A = \{0, p, 2p, 3p, \dots,$

$(n-1)p, \dots\}$ 也满足条件. 此时, 有 $A = \{0, p, 2p, 3p, \dots, (n-1)p, \dots\} \subsetneq \mathbf{N}$,

与 $M = \mathbf{N}$ 矛盾, 所以 x, y 互质. 13 分