北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学试卷（文史类）

2015．4

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）已知全集 $U=\{a,b,c,d\}$，集合 $A=\{a,b\},B=\{b,c\}$，则 $\complement_U(A\cup B)$ 等于

A．$\{b\}$　　B．$\{d\}$　　C．$\{a,c,d\}$　　D．$\{a,b,c\}$

（2）已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\le 1$，则

A．$\neg p:\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\ge 1$　　B．$\neg p:\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x>1$

C．$\neg p:\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin x_0\ge 1$　　D．$\neg p$：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin x_0>1$

（3）若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点与双曲线 $x^2-y^2=2$ 的右焦点重合，则 p 的值为

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．4　　D．$2\sqrt{2}$

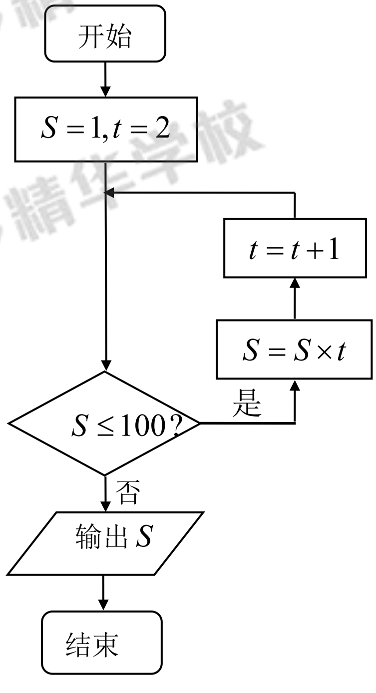
（4）如图所示的程序框图表示的算法功能是

A．计算 $S=1\times2\times3\times4\times5\times6$ 的值

B．计算 $S=1\times2\times3\times4\times5$ 的值

C．计算 $S=1\times2\times3\times4$ 的值

D．计算 $S=1\times3\times5\times7$ 的值



第（4）题图

（5）已知 $x_1=\log_{\frac{1}{3}}2$，$x_2=2^{-\frac{1}{2}}$，x_3 满足 $(\frac{1}{3})^{x_3}=\log_3 x_3$，则

A．$x_1<x_2<x_3$

B．$x_1<x_3<x_2$

C．$x_2<x_1<x_3$

D．$x_3<x_1<x_2$

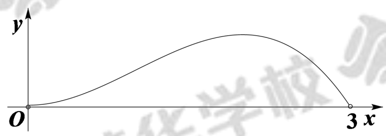
（6）函数 $f(x)=2\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\cos(x-\dfrac{\pi}{6})$ 图象的一条对称轴方程是

A．$x=\dfrac{\pi}{6}$　　B. $x=\dfrac{\pi}{3}$　　C. $x=\dfrac{5\pi}{12}$　　D. $x=\dfrac{2\pi}{3}$

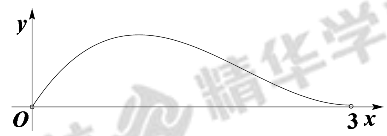
（7）已知实数 x， y 满足 $\begin{cases}2x+y\ge 0,\\ 2x-y\le 0,\\ 0\le y\le t,\end{cases}$ 其中 $t>0$．若 $z=3x+y$ 的最大值为 5，则 z 的最小值为

A．$\dfrac{5}{2}$　　B．1　　C．0　　D．-1

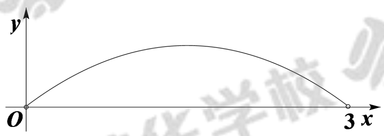
（8）已知边长为 3 的正方形 $ABCD$ 与正方形 $CDEF$ 所在的平面互相垂直，M 为线段 CD 上的动点（不含端点），过 M 作 $MH//DE$ 交 CE 于 H，作 $MG//AD$ 交 BD 于 G，连结 GH．设 $CM=x$ $(0<x<3)$，则下面四个图象中大致描绘了三棱锥 $C-GHM$ 的体积 y 与变量 x 变化关系的是



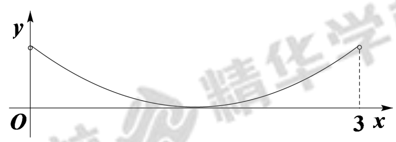
A



B



C



D

第二部分（非选择题 共 110 分）

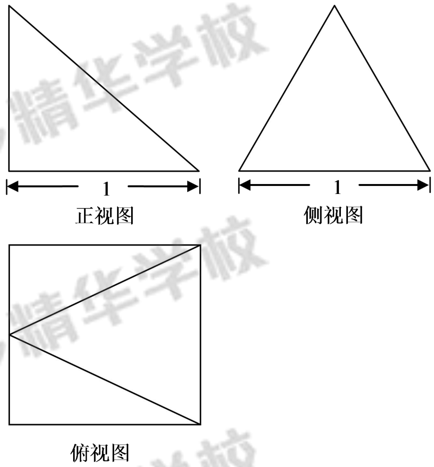
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

（9）i 为虚数单位，计算 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$=_________．

（10）已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$__________．

（11）圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=8$ 与 y 轴相交于 A,B 两点，则弦 AB 所对的圆心角的大小为__________．

（12）一个四棱锥的三视图如图所示，其中侧视图为正三角形，则该四棱锥的体积是_________，四棱锥侧面中最大侧面的面积是__________．



第（12）题图

（13）稿酬所得以个人每次取得的收入，定额或定率减除规定费用后的余额为应纳税所得额，每次收入不超过 4000 元，定额减除费用 800 元；每次收入在 4000 元以上的，定率减除 20%的费用.适用 20%的比例税率，并按规定对应纳税额减征 30%，计算公式为：

（1）每次收入不超过 4000 元的：应纳税额=（每次收入额－800）×20%×（1－30%）

（2）每次收入在 4000 元以上的：应纳税额=每次收入额×（1－20%）×20%×（1－30%）.

已知某人出版一份书稿，共纳税 280 元，这个人应得稿费(扣税前)为__________元．

（14）记 x_2-x_1 为区间 $[x_1,x_2]$ 的长度．已知函数 $y=2^{|x|}$，$x\in[-2,a]$（$a\geq 0$），其值域为 $[m,n]$，则区间 $[m,n]$ 的长度的最小值是__________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

（15）（本小题满分 13 分）

在 ΔABC 中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$BC=6$．

（Ⅰ）求 AC 的长；

（Ⅱ）求 ΔABC 的面积．

（16）（本小题满分 13 分）

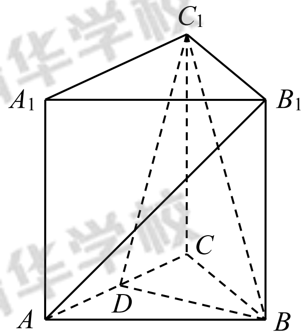
某次考试结束后，为了解甲、乙两所学校学生的数学考试情况，随机抽取甲、乙两校各 10 名学生的考试成绩，得茎叶图如图所示（部分数据不清晰）：

			甲校		乙校				
		3	2	9	0	1	5	6	8
6	*	2	1	8	0	*	2		
		2	*	7	3				
			6	6	5				
			8	5					

（Ⅰ）请根据茎叶图判断哪个学校的数学成绩平均水平较高（直接写出结果）；

（Ⅱ）若在抽到的这 20 名学生中，分别从甲、乙两校随机各抽取 1 名成绩不低于 90 分的学生，求抽到的学生中， 甲校学生成绩高于乙校学生成绩的概率.

（17）（本小题满分 14 分）



如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，各个侧面均是边长为 2 的正方形，D 为线段 AC 的中点.

（Ⅰ）求证：$BD\perp$ 平面 ACC_1A_1；

（Ⅱ）求证：直线 AB_1 // 平面 BC_1D；

（Ⅲ）设 M 为线段 BC_1 上任意一点，在 $\Delta\ BC_1D$ 内的平面区域（包括边界）是否存在点 E，使 $CE\perp DM$，并说明理由.

（18）（本小题满分 13 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=4$，$a_{n+1}=S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）写出 a_2，a_3，a_4 的值；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）已知等差数列 $\{b_n\}$ 中，有 $b_2=a_2$， $b_3=a_3$，求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

（19）（本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的两个焦点分别为$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$．过焦点$F_2$的直线$l$（斜率不为 0）与椭圆$C$交于$A,B$两点，线段$AB$的中点为$D$，$O$为坐标原点，直线$OD$交椭圆于$M,N$两点．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）当四边形MF_1NF_2为矩形时，求直线l的方程．

（20）（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=(x+\frac{a}{x})\mathrm{e}^x$，$a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）当$a=-1$时，求证：$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数；

（Ⅲ）若$f(x)$在区间$(0,1)$上有且只有一个极值点，求a的取值范围．

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学试卷答案（文史类）

2015.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答案	B	D	C	B	A	C	D	A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

题号	（9）	（10）	（11）	（12）		（13）	（14）
答案	i	$\frac{3}{2}$	90°	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	2800	3

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

（15）（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）因为 $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$B\in(0,\pi)$，又 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$，

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

由正弦定理得，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$．

所以 $\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$．

所以 $AC=4$．　　　　　　　　　　………　6 分

（Ⅱ）在 ΔABC 中，$\sin C=\sin(B+60^\circ)$

$$=\sin B\cos 60^\circ+\cos B\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}.$$

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}=2\sqrt{3}+6\sqrt{2}$． ……13 分

（16）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）从茎叶图可以看出，乙校 10 名学生的考试成绩的平均分高于甲校 10 名学生的考试成绩平均分，故乙校的数学成绩整体水平较高. ……… 4 分

（Ⅱ）设事件 M：分别从甲、乙两校随机各抽取 1 名成绩不低于 90 分的同学，抽到的学生中，甲校学生成绩高于乙校学生成绩.

由茎叶图可知，甲校成绩不低于 90 分的同学有 2 人，从小到大依次记为 A_1,A_2；乙校成绩不低于 90 分的同学有 5 人，从小到大依次记为 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5.

其中 $A_1=92,A_2=93,B_1=90,B_2=91,B_3=95,B_4=96,B_5=98$.

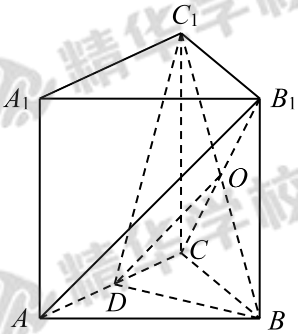
分别从甲、乙两校各随机抽取 1 名成绩不低于 90 分的同学共有 $A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_1B_4,A_1B_5,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_2B_4,A_2B_5$ 这 10 种可能.

其中满足“抽到的学生中，甲校学生成绩高于乙校学生成绩”共有 $A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2$ 这 4 种可能.

所以 $P(M)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

即分别从甲、乙两校随机各抽取 1 名成绩不低于 90 分的同学，抽到的学生中，甲校学生成绩高于乙校学生成绩的概率为 $\dfrac{2}{5}$. ……… 13 分

（17）（本小题满分 14 分）



解：（Ⅰ）证明：因为三棱柱的侧面是正方形，

所以 $CC_1\perp BC,CC_1\perp AC$，$BC\cap AC=C$.

所以 $CC_1\perp$ 底面 ABC.

因为 $BD\subset$ 底面 ABC，所以 $CC_1\perp BD$.

由已知可得，底面 ABC 为正三角形.

因为 D 是 AC 中点，所以 $BD\perp AC$.

因为 $AC\cap CC_1=C$，所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1. ……… 5 分

（Ⅱ）证明：如图，连接 B_1C 交 BC_1 于点 O，连接 OD.

显然点 O 为 B_1C 的中点.

因为 D 是 AC 中点， 所以 $AB_1 // OD$.

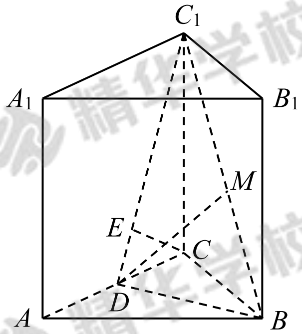
又因为 $OD \subset$ 平面 BC_1D ， $AB_1 \not\subset$ 平面 BC_1D ，

所以直线 $AB_1 //$ 平面 BC_1D . ……… 10 分

（III）在 ΔBC_1D 内的平面区域（包括边界）存在一点 E ，使 $CE \perp DM$.

此时点 E 是在线段 C_1D 上. 证明如下：

过 C 作 $CE \perp C_1D$ 交线段 C_1D 于 E ，



由（Ⅰ）可知 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 而 $CE \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,
所以 $BD \perp CE$.
又 $CE \perp C_1D$, $BD \cap C_1D = D$, 所以 $CE \perp$ 平面 BC_1D .

又 $DM \subset$ 平面 BC_1D ，所以 $CE \perp DM$. ……… 14 分

（18）（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：因为 $a_1 = 4$ ， $a_{n+1} = S_n$ ，

所以 $a_2 = S_1 = a_1 = 4$ ， $a_3 = S_2 = a_1 + a_2 = 4 + 4 = 8$ ，

$a_4 = S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 4 + 4 + 8 = 16$. ……… 3 分

（Ⅱ）由 $a_{n+1} = S_n$ ，可得 $S_{n+1} - S_n = S_n$,即 $S_{n+1} = 2S_n$ ，则 $\{S_n\}$ 为以 2 为公比的等比数列， $S_n = 2^{n+1}$.

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$.

又当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 4$.

所以 $a_n = \begin{cases} 4, & n = 1, \\ 2^n, & n \geq 2. \end{cases}$ ……… 6 分

（III）依题意， $b_2 = a_2 = 4$ ， $b_3 = a_3 = 8$.

则由 $\begin{cases} b_1 + d = 4 \\ b_1 + 2d = 8 \end{cases}$ 得， $b_1 = 0$ ， $d = 4$, 则 $b_n = 4(n-1)$.

所以 $a_n \cdot b_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ (n-1)2^{n+2}, & n \geq 2. \end{cases}$

所以 $a_n \cdot b_n = (n-1)2^{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

因为 $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n$

$$= 0 + 1\times 2^4 + 2\times 2^5 + 3\times 2^6 + \ldots + (n-2)\times 2^{n+1} + (n-1)\times 2^{n+2},$$

所以 $2T_n = 1\times 2^5 + 2\times 2^6 + 3\times 2^7 + \ldots + (n-2)\times 2^{n+2} + (n-1)\times 2^{n+3}$.

所以 $-T_n = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \ldots + 2^{n+2} - (n-1)\times 2^{n+3}$

$$= \frac{2^4(1-2^{n-1})}{1-2} - (n-1)\times 2^{n+3} = -16 - (n-2)\times 2^{n+3} .$$

所以 $T_n = 16 + (n-2)\times 2^{n+3}$. ……… 13 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意可得

$$\begin{cases} c = 2, \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$$ 解得 $a = \sqrt{6}$，$b = \sqrt{2}$.

故椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$. ……… 5 分

（Ⅱ）由题意可知直线 l 斜率存在，设其方程为 $y = k(x-2)$，点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

$M(x_3, y_3)$，$N(-x_3, -y_3)$，

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1, \\ y = k(x-2), \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0$，

所以 $x_1 + x_2 = \dfrac{12k^2}{1+3k^2}$.

因为 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 4) = \dfrac{-4k}{1+3k^2}$，

所以 AB 中点 $D(\dfrac{6k^2}{1+3k^2}, \dfrac{-2k}{1+3k^2})$.

因此直线OD方程为$x+3ky=0\ (k\neq 0)$.

由$\begin{cases} x+3ky=0, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$解得$y_3^2=\dfrac{2}{1+3k^2}$，$x_3=-3ky_3$.

因为四边形MF_1NF_2为矩形，所以$\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$，

即$(x_3-2,y_3)\cdot(-x_3-2,-y_3)=0$.

所以$4-x_3^2-y_3^2=0$.

所以$4-\dfrac{2(9k^2+1)}{1+3k^2}=0$.

解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故直线l的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$. ……… 14 分

（20）（本小题满分 13 分）

解：函数$f(x)$定义域为$\{x|x\neq 0\}$，$f'(x)=\dfrac{x^3+x^2+ax-a}{x^2}\mathrm{e}^x$.

（Ⅰ）当$a=0$时，$f(x)=x\cdot\mathrm{e}^x$，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$.

所以$f(1)=\mathrm{e}, f'(1)=2\mathrm{e}$.

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程是$y-\mathrm{e}=2\mathrm{e}(x-1)$，

即$2\mathrm{e}x-y-\mathrm{e}=0$. ……… 3 分

（Ⅱ） 当$a=-1$时，$f'(x)=\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x^2}\mathrm{e}^x$.

设$g(x)=x^3+x^2-x+1$，则$g'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$.

令$g'(x)=(3x-1)(x+1)>0$得，$x>\dfrac{1}{3}$或$x<-1$，注意到$x>0$，所以$x>\dfrac{1}{3}$.

令$g'(x)=(3x-1)(x+1)<0$得，注意到$x>0$，得$0<x<\dfrac{1}{3}$.

所以函数$g(x)$在$(0,\dfrac{1}{3})$上是减函数，在$(\dfrac{1}{3},+\infty)$上是增函数.

所以函数$g(x)$在$x=\dfrac{1}{3}$时取得最小值，且$g(\dfrac{1}{3})=\dfrac{22}{27}>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于零.

于是，当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x^2}\mathrm{e}^x>0$ 恒成立.

所以当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数. ……… 7 分

（Ⅱ）问另一方法提示：当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x^2}\mathrm{e}^x$.

由于 $x^3+x^2-x+1>0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上成立，即可证明函数 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数.

（Ⅲ）（Ⅱ）$f'(x)=\mathrm{e}^x(\dfrac{x^3+x^2+ax-a}{x^2})$.

设 $h(x)=x^3+x^2+ax-a$，$h'(x)=3x^2+2x+a$.

(1) 当 $a>0$ 时，$h'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

而 $h(0)=-a<0$，$h(1)=2>0$，则函数 $h(x)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上有且只有一个零点 x_0，使 $f'(x_0)=0$，且在 $(0,x_0)$ 上，$f'(x)<0$，在 $\left(x_0,1\right)$ 上，$f'(x)>0$，故 x_0 为函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上唯一的极小值点；

（2）当 $a=0$ 时，当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$h'(x)=3x^2+2x>0$ 成立，函数 $h(x)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上为增函数，又此时 $h(0)=0$，所以函数 $h(x)>0$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 恒成立，即 $f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 为单调递增函数，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上无极值；

（3）当 $a<0$ 时，$h(x)=x^3+x^2+ax-a=x^3+x^2+a(x-1)$.

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，总有 $h(x)>0$ 成立，即 $f'(x)>0$ 成立，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上为单调递增函数，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上无极值.

综上所述 $a>0$. ……… 13 分