北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试（理工类）

2015．4

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{1,2,m^2\}$，$B=\{1,m\}$．若 $B\subseteq A$，则 $m=$

A. 0　　B. 2　　C. 0 或 2　　D. 1 或 2

2.已知点 $A(1,y_0)$ $(y_0>0)$ 为抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上一点.若点 A 到该抛物线焦点的距离为 3，则 $y_0=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

3.在 ΔABC 中，若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$BC=6$,则 $AC=$

A. $4\sqrt{2}$　　B.4　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

4.“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+ax+1\ge 0$ 成立”是“$|a|\le 2$”的

A．充分必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分而不必要条件　D.既不充分也不必要条件

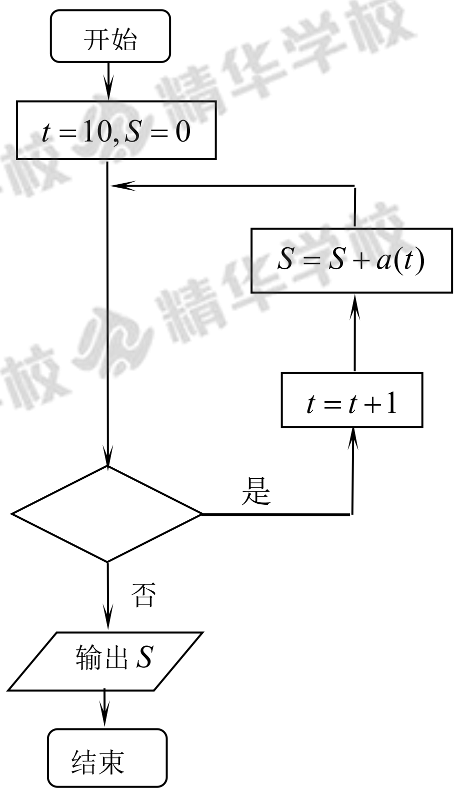
5.某商场每天上午 10 点开门,晚上 19 点停止进入.在如图所示的框图中，t 表示整点时刻，$a(t)$ 表示时间段 $[t-1,t)$ 内进入商场人次，S 表示某天某整点时刻前进入商场人次总和，为了统计某天进入商场的总人次数，则判断框内可以填

A．$t\le 17$?

B．$t\ge 19$?

C．$t\ge 18$?

D．$t\le 18$?



6.设 x_1,x_2,x_3 均为实数，且 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}=\log_2(x_1+1)$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}=\log_3 x_2$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{x_3}=\log_2 x_3$ 则

A. $x_1<x_3<x_2$　　B. $x_3<x_2<x_1$　　C. $x_3<x_1<x_2$　　D. $x_2<x_1<x_3$

7.在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(1,0)$，$B(1,1)$，且 $\angle BOP=90^\circ$.设 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}\ (k\in\mathbf{R})$，则 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

8. 设集合 $M=\left\{(x_0,y_0)\,\middle|\,x_0{}^2+y_0{}^2\le 20, x_0\in\mathbf{Z}, y_0\in\mathbf{Z}\right\}$，则 M 中元素的个数为

A. 61　　B. 65　　C. 69　　D.84

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. i 为虚数单位，计算 $\frac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ ______.

10.设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $a_3+a_8=3$，$S_3=1$,则通项公式 $a_n=$______.

11. 在极坐标中，设 $\rho>0, 0\le\theta<2\pi$，曲线 $\rho=2$ 与曲线 $\rho\sin\theta=2$ 交点的极坐标为______.

12. 已知有身穿两种不同队服的球迷各有三人，现将这六人排成一排照相，要求身穿同一种队服的球迷均不能相邻，则不同的排法种数为__________．（用数字作答）

13. 设 $z=3x+y$，实数 x，y 满足 $\begin{cases}2x+y\ge 0,\\ 2x-y\le 0,\\ 0\le y\le t,\end{cases}$ 其中 $t>0$．若 z 的最大值为 5，则实数 t 的值为______，此时 z 的最小值为______.

14. 将体积为 1 的四面体第一次挖去以各棱中点为顶点的构成的多面体，第二次再将剩余的每个四面体均挖去以各棱中点为顶点的构成的多面体，如此下去，共进行了 $n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 次.则第一次挖去的几何体的体积是______；这 n 次共挖去的所有几何体的体积和是______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题满分 13 分）

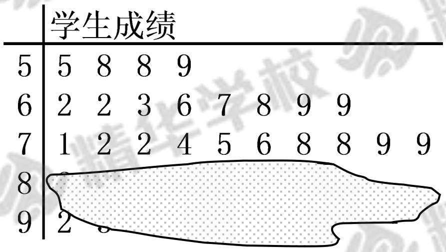
已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$， $x\in\mathbf{R}$．

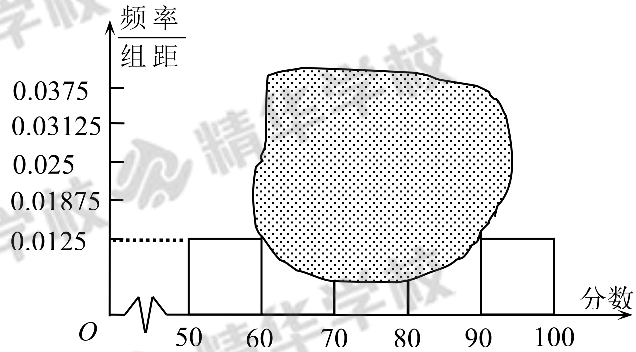
（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间；

（Ⅱ）设 $x=m\ (m\in\mathbf{R})$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的对称轴，求 $\sin 4m$ 的值．

16．（本小题满分 13 分）

如图所示，某班一次数学测试成绩的茎叶图和频率分布直方图都受到不同程度的污损，其中，频率分布直方图的分组区间分别为 $[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$．据此解答如下问题．





（Ⅰ）求全班人数及分数在 $[80,100]$ 之间的频率；

（Ⅱ）现从分数在 $[80,100]$ 之间的试卷中任取 3 份分析学生失分情况，设抽取的试卷分数在 $[90,100]$ 的份数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

17．（本小题满分 14 分）

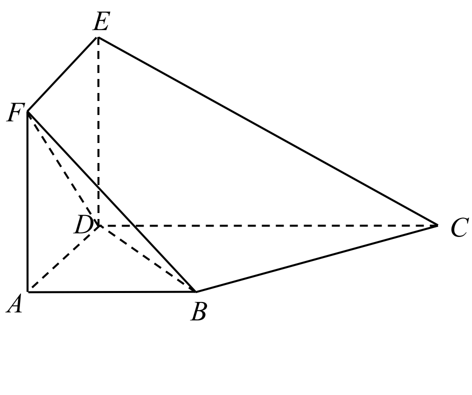
如图，正方形 $ADEF$ 与梯形 $ABCD$ 所在平面互相垂直， 已知 $AB\,//\,CD, AD\perp CD$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}CD$．

（Ⅰ）求证: $BF\ //$ 平面 CDE；

（Ⅱ）求平面 BDF 与平面 CDE 所成锐二面角的余弦值;

(III) 线段 EC 上是否存在点 M，使得平面 $BDM\perp$ 平面 BDF？

若存在，求出 $\dfrac{EM}{EC}$ 的值；若不存在，说明理由．



18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{x^2}{2}-(a+1)x$，$a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ） 当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ） 当 $a\le 1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $F(2,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．过焦点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，线段 AB 中点为 D，O 为坐标原点，过 O，D 的直线交椭圆于 M,N 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）求四边形 $AMBN$ 面积的最大值.

20.（本小题满分 13 分）

若数列 $\{a_n\}$ 中不超过 $f(m)$ 的项数恰为 $b_m\ (m\in\mathbf{N}^*)$，则称数列 $\{b_m\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的生成数列，称相应的函数 $f(m)$ 是 $\{a_n\}$ 生成 $\{b_m\}$ 的控制函数．设 $f(m)=m^2$．

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 单调递增，且所有项都是自然数，$b_1=1$，求 a_1；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 单调递增，且所有项都是自然数，$a_1=b_1$，求 a_1；

(Ⅲ) 若 $a_n=2n(n=1,2,3\cdots)$，是否存在 $\{b_m\}$ 生成 $\{a_n\}$ 的控制函数 $g(n)=pn^2+qn+r$ （其中常数 $p,q,r\in\mathbf{Z}$）？使得数列 $\{a_n\}$ 也是数列 $\{b_m\}$ 的生成数列？若存在，求出 $g(n)$；若不存在，说明理由.

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学答案（理工类）　　2015．4

一、选择题（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	B	A	D	A	B	C

二、填空题（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$	$\frac{n-1}{3}$	$\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$	72	$2;-1$	$\frac{1}{2};1-(\frac{1}{2})^n$

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题（满分 80 分）

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由已知，函数 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}.$$

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\pi$．

当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 时（$k\in\mathbf{Z}$），即 $k\pi+\frac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 为减函数.即函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$．　　…………………9 分

（Ⅱ）由 $x=m$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的对称轴，则 $2m+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），即 $m=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{6}$，

$k\in\mathbf{Z}$.则 $4m=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$.则 $\sin 4m=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　…………………13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由茎叶图可知，分布在 $[50,60)$ 之间的频数为 4，由直方图，频率为 $0.0125\times 10=0.125$，

所以全班人数为 $\frac{4}{0.125}=32$ 人.

所以分数在 $[80,100]$ 之间的人数为 $32-(4+8+10)=10$ 人.

分数在 $[80,100]$ 之间的频率为 $\frac{10}{32}=0.3125$　　…………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，分数在 $[80,100]$ 之间的有 10 份，分数在 $[90,100]$ 之间的人数有

0.0125　10　32=4 份，由题意，X 的取值可为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，　　$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，　$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$．

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量 X 的数学期望为 $EX=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$．……………………13 分

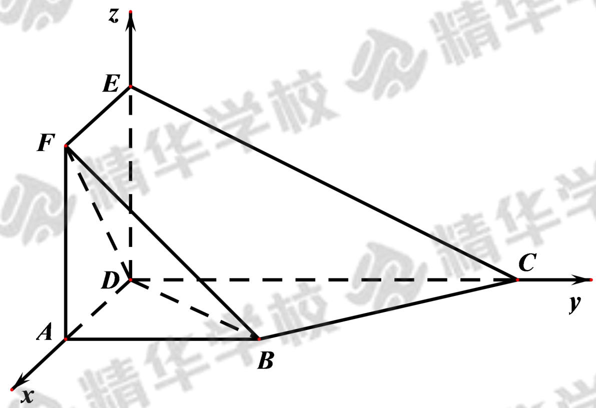
17.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB\,//\,CD, AB\not\subset$ 平面 $CDE, CD\subset$ 平面 CDE，

所以 $AB\,//$ 平面 CDE，同理，$AF\,//$ 平面 CDE，

又 $AB\cap AF=A$，所以平面 $ABF\,//$ 平面 CDE，

因为 $BF\subset$ 平面 ABF，所以 $BF\,//$ 平面 CDE．　………………4 分



（Ⅱ）因为平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$CD\perp AD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $CD\perp$ 平面 $ADEF$．又 $DE\subset$ 平面 $ADEF$，故 $CD\perp ED$．

而四边形 $ADEF$ 为正方形，所以 $AD\perp DE$ 又 $AD\perp CD$，

以 D 为原点，DA，DC，DE 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$．设 $AD=1$，则 $D(0,0,0), B(1,1,0), F(1,0,1), C(0,2,0), E(0,0,1)$，

取平面 CDE 的一个法向量 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，

设平面 BDF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

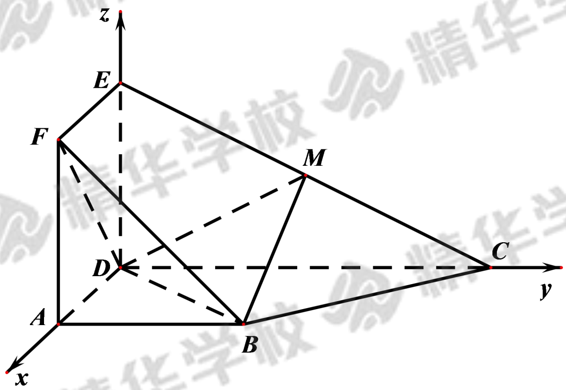
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ x+z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=z=-1$，　所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$．

设平面 BDF 与平面 CDE 所成锐二面角的大小为 θ，

则 $\cos\theta = |\cos < \overrightarrow{DA}, \boldsymbol{n} >| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………9 分

所以平面 BDF 与平面 CDE 所成锐二面角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(III)



若 M 与 C 重合，则平面 $BDM(C)$ 的一个法向量 $\boldsymbol{m}_0 = (0,0,1)$，由（Ⅱ）知平面 BDF 的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (1,-1,-1)$，则 $\boldsymbol{m}_0 \cdot \boldsymbol{n} = -1 \neq 0$，则此时平面 BDF 与平面 BDM 不垂直.

若 M 与 C 不重合，如图设 $\dfrac{EM}{EC} = \lambda \ (0 \le \lambda < 1)$，则 $M(0,2\lambda,1-\lambda)$，设平面 BDM 的一个法向量 $\boldsymbol{m} = (x_0, y_0, z_0)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DM} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ 2\lambda y_0 + (1-\lambda) z_0 = 0 \end{cases}$，令 $x_0 = 1$，则 $y_0 = -1, z_0 = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda}$，

所以 $\boldsymbol{m} = (1,-1,\dfrac{2\lambda}{1-\lambda})$，

若平面 $BDF \perp$ 平面 BDM 等价于 $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0$，即 $1 + 1 - \dfrac{2\lambda}{1-\lambda} = 0$, 所以 $\lambda = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$.

所以，EC 上存在点 M 使平面 $BDF \perp$ 平面 BDM，且 $\dfrac{EM}{EC} = \dfrac{1}{2}$…………………14 分

18. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$.

当 $a = -1$ 时，$f(x) = -\ln x + \dfrac{x^2}{2}$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x} + x = \dfrac{x^2 - 1}{x} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$.

由 $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x} > 0 \ (x > 0)$ 解得 $x > 1$；由 $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x} < 0 \ (x > 0)$ 解得 $0 < x < 1$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减, 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增.

所以 $x=1$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值 $f(1)=\frac{1}{2}$.　　　………………5 分

（Ⅱ） $f'(x)=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$，$x>0$.

（1）当 $a\le 0$ 时，

$x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数;

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得最小值 $f(1)=-a-\frac{1}{2}$.

（ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2}-x$，由于 $x>0$，令 $f(x)=0$，$x=2$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个零点;

（ⅱ）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，即 $f(1)=0$ 时，$f(x)$ 有一个零点;

（ⅲ）当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，即 $f(1)>0$ 时，$f(x)$ 无零点.

（ⅳ）当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，即 $f(1)<0$ 时，

由于 $x\to 0$（从右侧趋近 0）时，$f(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以 $f(x)$ 有两个零点.

(2) 当 $0<a<1$ 时，

$x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数;

$x\in(a,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数;

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极大值，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值.

$f(a)=a\ln a+\frac{1}{2}a^2-(a+1)a=a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a$.

当 $0<a<1$ 时，$f(a)<0$，即在 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$.

而 $f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时为增函数，且 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以此时 $f(x)$ 有一个零点.

(3) 当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 为增函数.

且 $x\to 0$（从右侧趋近 0）时，$f(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

所以 $f(x)$ 有一个零点.

综上所述，$0\le a\le 1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 有一个零点；$a<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 无零点；$-\frac{1}{2}<a<0$ $f(x)$ 有两个零点.

………………13 分

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意可得

$$\begin{cases} c=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$$ 解得 $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，

故椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ……4 分

（Ⅱ）当直线 l 斜率不存在时 A,B 的坐标分别为 $(2,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$(2,-\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$|MN|=2\sqrt{6}$，

四边形 $AMBN$ 面积为 $S_{AMBN}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot|AB|=4$．

当直线 l 斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-2)$，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(-x_3,-y_3)$，点 M,N 到直线 l 的距离分别为 d_1,d_2，则四边形 $AMBN$ 面积为 $S_{AMBN}=\dfrac{1}{2}|AB|(d_1+d_2)$．

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1, \\ y=k(x-2), \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{12k^2-6}{1+3k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)[(\dfrac{12k^2}{1+3k^2})^2-4\times\dfrac{12k^2-6}{1+3k^2}]}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{1+3k^2}$．

因为 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\dfrac{-4k}{1+3k^2}$，

所以 AB 中点 $D(\dfrac{6k^2}{1+3k^2},\dfrac{-2k}{1+3k^2})$．

当 $k\neq0$ 时，直线 OD 方程为 $x+3ky=0$，

由 $\begin{cases} x+3ky=0, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 解得 $x_3=-3ky_3$，$y_3^2=\dfrac{2}{1+3k^2}$．

所以 $S_{AMBN}=\dfrac{1}{2}|AB|(d_1+d_2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{1+3k^2}(\frac{|kx_3-y_3-2k|}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{|-kx_3+y_3-2k|}{\sqrt{1+k^2}})$

$=\frac{\sqrt{6}\sqrt{1+k^2}\,|2kx_3-2y_3|}{1+3k^2}$

$=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{1+k^2}\,|-3k^2y_3-y_3|}{1+3k^2}$

$=4\sqrt{\frac{3k^2+3}{1+3k^2}}=4\sqrt{1+\frac{2}{1+3k^2}}<4\sqrt{3}$．

当 $k=0$ 时，四边形 $AMBN$ 面积的最大值 $S_{AMBN}=2\sqrt{6}\times\sqrt{2}=4\sqrt{3}$．

综上四边形 $AMBN$ 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$．　…………………………14 分

20．（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）若 $b_1=1$，因为数列 $\{a_n\}$ 单调递增，所以 $a_1\le 1^2$，又 a_1 是自然数，所以 $a_1=0$ 或 1.　………2 分

（Ⅱ）因为数列 $\{a_n\}$ 的每项都是自然数，

若 $a_1=0\le 1^2$，则 $b_1\ge 1$，与 $a_1=b_1$ 矛盾；

若 $a_1\ge 2$，则因 $\{a_n\}$ 单调递增，故不存在 $a_n\le 1^2$，即 $b_1=0$，也与 $a_1=b_1$ 矛盾.

当 $a_1=1$ 时，因 $\{a_n\}$ 单调递增，故 $n\ge 2$ 时，$a_n>1$，所以 $b_1=1$，符合条件，

所以，$a_1=1$.　………6 分

（Ⅲ）若 $a_n=2n(n=1,2,\cdots)$，则数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递增，显然数列 $\left\{b_m\right\}$ 也单调递增，

由 $a_n\le m^2$，即 $2n\le m^2$，得 $n\le\frac{1}{2}m^2$，

所以，b_m 为不超过 $\frac{1}{2}m^2$ 的最大整数，

当 $m=2k-1\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，因为 $2k^2-2k<\frac{1}{2}m^2=2k^2-2k+\frac{1}{2}<2k^2-2k+1$，

所以 $b_m=2k^2-2k$；

当 $m=2k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，$\frac{1}{2}m^2=2k^2$，所以，$b_m=2k^2$.

综上，$b_m=\begin{cases}2k^2-2k, m=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)\\ 2k^2,\quad m=2k(k\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$，

即当 $m>0$ 且 m 为奇数时，$b_m=\dfrac{m^2-1}{2}$；当 $m>0$ 且 m 为偶数时，$b_m=\dfrac{m^2}{2}$.

若数列 $\{a_n\}$ 是数列 $\{b_m\}$ 的生成数列，且 $\{b_m\}$ 生成 $\{a_n\}$ 的控制函数为 $g(n)$，

则 b_m 中不超过 $g(n)$ 的项数恰为 a_n，即 b_m 中不超过 $g(n)$ 的项数恰为 $2n$，

所以 $b_{2n}\le g(n)<b_{2n+1}$，即 $2n^2\le pn^2+qn+r<2n^2+2n$ 对一切正整数 n 都成立，

即 $\begin{cases}(p-2)n^2+qn+r\ge 0\\(2-p)n^2+(2-q)n-r>0\end{cases}$ 对一切正整数 n 都成立，

故得 $p=2$，且 $\begin{cases}qn+r\ge 0\\(2-q)n-r>0\end{cases}$ 对一切正整数 n 都成立，故 $0\le q\le 2$，$q\in\mathbf{Z}$.

又常数 $r\in\mathbf{Z}$，

当 $q=0$ 时，$0\le r<2n(n\ge 1)$，所以 $r=0$，或 $r=1$；

当 $q=1$ 时，$-n\le r<n(n\ge 1)$，所以 $r=0$，或 $r=-1$；

当 $q=2$ 时，$-2n\le r<0(n\ge 1)$，所以 $r=-2$，或 $r=-1$；

所以 $g(n)=2n^2$，或 $2n^2+1$，或 $2n^2+n-1$，或 $2n^2+n$，或 $2n^2+2n-2$，或 $2n^2+2n-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. ………13 分