海淀区高三年级第二学期期中练习

数　　学（理科）

2015.4

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>1\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2\leqslant 4\}$，则 $A\cup B=$

A. $[-2,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,2]$　　D. $(-\infty,+\infty)$

2. 抛物线 $x^2=4y$ 上的点到其焦点的最短距离为

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为60°，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. 1

4. “$\sin\alpha>0$”是“角 α 是第一象限的角”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 圆 $\begin{cases}x=-1+\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）被直线 $y=0$ 截得的劣弧长为

A. $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　B. π　　C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

6. 若 x，y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x\geqslant 1,\\ x-y\geqslant 0,\end{cases}$ 则下列不等式恒成立的是

A. $y\geqslant 1$　　B. $x\geqslant 2$

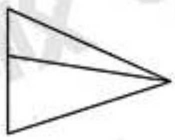
C. $x+2y+2\geqslant 0$　　D. $2x-y+1\geqslant 0$

7. 某三棱锥的正视图如图所示，则这个三棱锥的俯视图不可能是

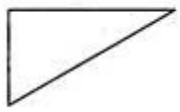
正视图

A.

B.



C.



D.

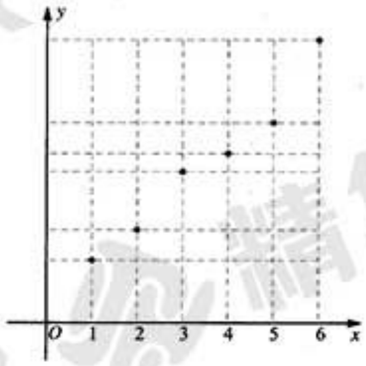
8. 某地区在六年内第 x 年的生产总值 y（单位：亿元）与 x 之间的关系如图所示，则下列四个时段中，生产总值的年平均增长率最高的是

A. 第一年到第三年

B. 第二年到第四年

C. 第三年到第五年

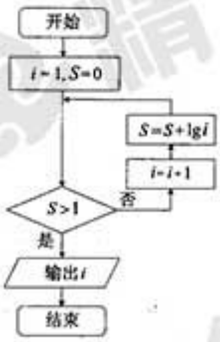
D. 第四年到第六年



二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知 $\frac{ai}{1-i}=-1+i$，其中 i 是虚数单位，那么实数 $a=$____.

10. 执行如图所示的程序框图，输出的 i 值为____.



11. 已知 $m,4,n$ 是等差数列，那么 $(\sqrt{2})^m\cdot(\sqrt{2})^n=$____；$mn$ 的最大值为____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a=\sqrt{2}, c=\sqrt{3}$，$\angle A=\frac{\pi}{4}$，则 $\angle B$ 的大小为____.

13. 社区主任要为小红等 4 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照，要求排成一排，小红必须与 2 位老人都相邻，且两位老人不排在两端，则不同的排法种数是____.（用数字作答）

14. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, x<a,\\ x^2, x\geqslant a.\end{cases}$ 若存在实数 b，使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有两个零点，则 a 的取值范围是____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

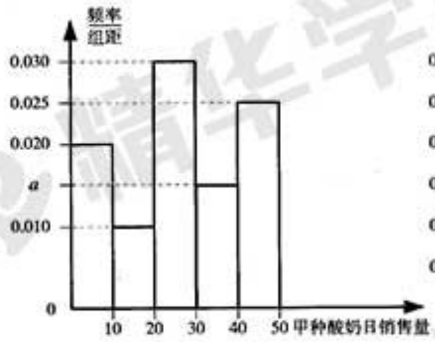
已知函数 $f(x)=\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期及其图象的对称轴方程；

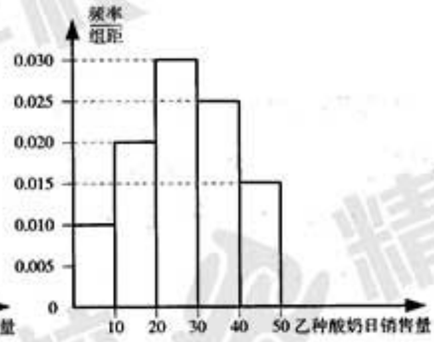
（Ⅱ）求 $f(\frac{\pi}{3}-x)$ 的单调递减区间.

16.（本小题满分 13 分）

某超市从 2014 年甲、乙两种酸奶的日销售量（单位：箱）的数据中分别随机抽取 100 个，并按 $[0,10]$, $(10,20]$, $(20,30]$, $(30,40]$, $(40,50]$ 分组，得到频率分布直方图如下：



（甲）



（乙）

假设甲、乙两种酸奶独立销售且日销售量相互独立.

（Ⅰ）写出频率分布直方图（甲）中 a 的值；记甲种酸奶与乙种酸奶日销售量（单位：箱）的方差分别为 s_1^2，s_2^2，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小；（只需写出结论）

（Ⅱ）估计在未来的某一天里，甲、乙两种酸奶的销售量恰有一个高于 20 箱且另一个不高于 20 箱的概率；

（Ⅲ）设 X 表示在未来 3 天内甲种酸奶的日销售量不高于 20 箱的天数，以日销售量落入各组的频率作为概率，求 X 的数学期望.

17.（本小题满分 14 分）

如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$、$AD \perp DC$、$BC = 2AD = 2DC$，四边形 $ABEF$ 是正方形. 将正方形 $ABEF$ 沿 AB 折起到四边形 ABE_1F_1 的位置，使平面 $ABE_1F_1 \perp$ 平面 $ABCD$，M 为 AF_1 的中点，如图 2.

（Ⅰ）求证：$BE_1 \perp DC$；

（Ⅱ）求 BM 与平面 CE_1M 所成角的正弦值；

（Ⅲ）判断直线 DM 与 CE_1 的位置关系，并说明理由.

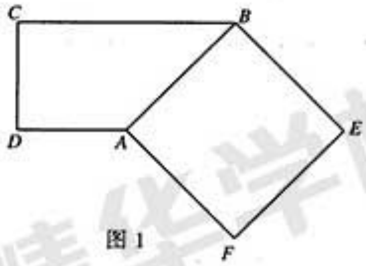


图 1

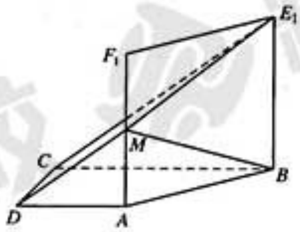


图 2

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = a\ln x + \frac{1}{x}(a \neq 0)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $\{x|f(x) \leq 0\} = [b,c]$（其中 $b < c$），求 a 的取值范围，并说明 $[b,c] \subseteq (0,1)$.

19.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 过点 $(0,-1)$，且离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程；

（Ⅱ）是否存在菱形 $ABCD$，同时满足下列三个条件：

① 点 A 在直线 $y = 2$ 上；

② 点 B,C,D 在椭圆 M 上；

③ 直线 BD 的斜率等于 1.

如果存在，求出 A 点坐标；如果不存在，说明理由.

20.（本小题满分 14 分）

有限数列 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geq 3)$ 同时满足下列两个条件：

① 对于任意的 $i, j(1 \leq i < j \leq n)$，$a_i < a_j$；

② 对于任意的 $i,j,k(1 \leq i < j < k \leq n)$，$a_ia_j, a_ja_k, a_ia_k$ 三个数中至少有一个数是数列 A_n 中的项.

（Ⅰ）若 $n = 4$，且 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = a, a_4 = 6$，求 a 的值；

（Ⅱ）证明：2,3,5 不可能是数列 A_n 中的项；

（Ⅲ）求 n 的最大值.

海淀区高三年级第二学期期中练习

数学（理）答案及评分参考　　2015.4

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）A　　（2）C　　（3）D　　（4）B

（5）A　　（6）D　　（7）C　　（8）A

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。有两空的小题，第一空 2 分，第二空 3 分）

（9）2　　（10）4　　（11）16,16

（12）$\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\dfrac{5\pi}{12}$　　（13）24　　（14）$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2(x+\frac{\pi}{4})}{2}$ ………………2 分

$=\dfrac{1+\sin 2x}{2}$.

所以 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. ………………4 分

令 $2x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得：$x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. ………………6 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，对称轴的方程为 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

（Ⅱ）$f(\dfrac{\pi}{3}-x)=\dfrac{\sin 2(\frac{\pi}{3}-x)+1}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}\sin(2x-\dfrac{2\pi}{3})+\dfrac{1}{2}$. ………………9 分

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{2\pi}{3}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

得：$k\pi+\dfrac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\dfrac{7\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(\dfrac{\pi}{3}-x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{7\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$. ………………13 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$a=0.015$； ………………2 分

$s_1^2>s_2^2$. ………………4 分

（Ⅱ）设事件 A：在未来的某一天里，甲种酸奶的销售量不高于 20 箱；

事件 B：在未来的某一天里，乙种酸奶的销售量不高于 20 箱；

事件 C：在未来的某一天里，甲、乙两种酸奶的销售量恰好一个高于 20 箱且另一个不高于 20 箱. 则

$P(A)=0.20+0.10=0.3$，$P(B)=0.10+0.20=0.3$. ………………6 分

所以 $P(C)=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=0.42$. ………………8 分

（Ⅲ）由题意可知，X 的可能取值为 0，1，2，3. ………………9 分

$P(X=0)=C_3^0\times0.3^0\times0.7^3=0.343$，

$P(X=1)=C_3^1\times0.3^1\times0.7^2=0.441$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.3^2\times0.7^1=0.189$，

$P(X=3)=C_3^3\times0.3^3\times0.7^0=0.027$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.343	0.441	0.189	0.027

………………11 分

所以 X 的数学期望 $EX=0\times0.343+1\times0.441+2\times0.189+3\times0.027=0.9$. ………………13 分

另解：由题意可知 $X\sim B(3,0.3)$.

所以 X 的数学期望 $EX=3\times0.3=0.9$. ………………13 分

（17）（共 14 分）

证明：（Ⅰ）证明：因为 四边形 ABE_1F_1 为正方形，

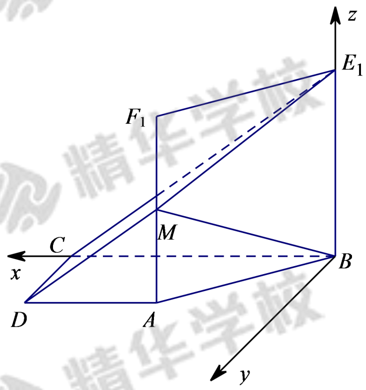
所以 $BE_1 \perp AB$.

因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 ABE_1F_1，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABE_1F_1 = AB$，$BE_1 \subset$ 平面 ABE_1F_1，

所以 $BE_1 \perp$ 平面 $ABCD$. ……………2 分

因为 $DC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BE_1 \perp DC$. ……………4 分



（II）解：如图，以点 B 为坐标原点，分别以 BC, BE_1 所在的直线为 x, z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$.

设 $AD=1$，则

$B(0,0,0), C(2,0,0), E_1(0,0,\sqrt{2}), M(1,1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 $\overrightarrow{BM}=(1,1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{CE_1}=(-2,0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{E_1M}=(1,1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$. ……………6 分

设平面 CE_1M 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{E_1M}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x+\sqrt{2}z=0,\\ x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，得 $z=\sqrt{2}, y=0$，所以 $\vec{n}=(1,0,\sqrt{2})$. ……………8 分

设 BM 与平面 CE_1M 所成角为 θ，

则 $\sin\theta = \left|\cos<\overrightarrow{BM},\vec{n}>\right| = \left|\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BM}||\vec{n}|}\right| = \left|\frac{1+0+1}{\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{3}}\right| = \frac{2\sqrt{30}}{15}$.

所以 BM 与平面 CE_1M 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. ……………10

分

（Ⅲ）解：直线DM与直线CE_1平行．理由如下：………………11分

由题意得，$D(2,1,0),\overrightarrow{DM}=(-1,0,\frac{\sqrt{2}}{2}),\overrightarrow{CE_1}=(-2,0,\sqrt{2})$．

所以 $\overrightarrow{CE_1}=2\overrightarrow{DM}$．

所以 $\overrightarrow{CE_1}//\overrightarrow{DM}$．………………13分

因为 DM，CE_1不重合，

所以 $DM//CE_1$．………………14分

另解：直线DM与直线CE_1平行．理由如下：

取BC的中点P，CE_1的中点Q，连接AP，PQ，QM．

所以 $PQ//BE_1$且$PQ=\frac{1}{2}BE_1$．

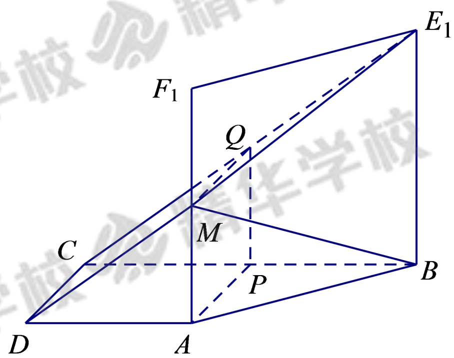
因为 M为AF_1的中点，四边形ABE_1F_1是正方形，

所以 $AM//BE_1$且$AM=\frac{1}{2}BE_1$．

所以 $PQ//AM$且$PQ=AM$．

所以 $APQM$为平行四边形．

所以 $MQ//AP$且$MQ=AP$．



因为 四边形$ABCD$为梯形，$BC=2AD$，

所以 $AD//PC$且$AD=PC$．

所以 四边形$APCD$为平行四边形．

所以 $CD//AP$且$CD=AP$．

所以 $CD//MQ$且$CD=MQ$．

所以 $CDMQ$ 是平行四边形.

所以 $DM // CQ$，即 $DM // CE_1$. ………………14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}(x>0)$. ………………2 分

（ⅰ）当 $a<0$ 时， $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,+\infty)$. ………………3 分

（ⅱ）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$.

当 x 变化时， $f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\frac{1}{a})$，单调递增区间是 $(\frac{1}{a},+\infty)$. ………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是减函数，所以，函数 $f(x)$ 至多存在一个零点,不符合题意. ………………6 分

当 $a>0$ 时，因为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 内是减函数，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 内是增函数，所以 要使 $\{x|f(x)\le 0\}=[b,c]$，必须 $f(\frac{1}{a})<0$，即 $a\ln\frac{1}{a}+a<0$.

所以 $a>\mathrm{e}$. ………………7 分

当 $a>\mathrm{e}$ 时， $f(\frac{1}{a^2})=a\ln(\frac{1}{a^2})+a^2=-2a\ln a+a^2=a\cdot(a-2\ln a)$.

令 $g(x)=x-2\ln x(x\ge \mathrm{e})$，则 $g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}(x\ge \mathrm{e})$.

当 $x>\mathrm{e}$ 时， $g'(x)>0$，所以， $g(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上是增函数.

所以 当$a>\mathrm{e}$时，$g(a)=a-2\ln a>g(\mathrm{e})=\mathrm{e}-2>0$.

所以 $f(\frac{1}{a^2})>0$. ………………9

分

因为 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a}<1$，$f(\frac{1}{a})<0$，$f(1)=1>0$，

所以 $f(x)$在$(\frac{1}{a^2},\frac{1}{a})$内存在一个零点，不妨记为$b$，在$(\frac{1}{a},1)$内存在一个零点，不妨记为$c$. ………………

11 分

因为 $f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$内是减函数，在$(\frac{1}{a},+\infty)$内是增函数，

所以 $\{x|f(x)\le 0\}=[b,c]$.

综上所述，a的取值范围是$(\mathrm{e},+\infty)$. ………………12

分

因为 $b\in(\frac{1}{a^2},\frac{1}{a})$，$c\in(\frac{1}{a},1)$，

所以 $[b,c]\subseteq(0,1)$. ………………13

分

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由题意得：$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2-b^2=c^2. \end{cases}$ ………………3

分

解得：$\begin{cases} a^2=3, \\ b^2=1. \end{cases}$

所以 椭圆M的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ………………4

分

（Ⅱ）不存在满足题意的菱形$ABCD$，理由如下： ………………5

分

假设存在满足题意的菱形$ABCD$.

设直线BD的方程为$y=x+m$，$B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，线段BD的中点$Q(x_0,y_0)$，

点 $A(t,2)$. ……………… 6分

由 $\begin{cases} x^2+3y^2=3, \\ y=x+m \end{cases}$ 得 $4y^2-2my+m^2-3=0$. ………………8分

由 $\Delta=(2m)^2-16(m^2-3)>0$ ，解得 $-2<m<2$. ………………9分

因为 $y_1+y_2=\dfrac{m}{2}$,

所以 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{m}{4}$. ………………11分

因为 四边形 $ABCD$ 为菱形，

所以 Q 是 AC 的中点.

所以 C 点的纵坐标 $y_C=2y_0-2=\dfrac{m}{2}-2<-1$. ………………12分

因为 点 C 在椭圆 M 上，

所以 $y_C\geq -1$.这与 $y_C<-1$ 矛盾. ………………13分

所以 不存在满足题意的菱形 $ABCD$.

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由①，得 $2<a<6$.

由②，当 $i=2$，$j=3$，$k=4$ 时. $2a,6a,12$ 中至少有一个是数列 1，2，a，6 中的项，但 $6a>6$，$12>6$，故 $2a=6$，解得 $a=3$.

经检验，当 $a=3$ 时，符合题意. ………………3分

（Ⅱ）假设 $2,3,5$ 是数列 A_n 中的项，由②可知：6，10，15 中至少有一个是数列 A_n 中的项，则有限数列 A_n 的最后一项 $a_n>5$，且 $n\geq 4$.

由①，$a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > a_{n-3} > 1$. ………………4分

对于数 a_{n-2}, a_{n-1}, a_n，由②可知：$a_{n-2}a_{n-1} = a_n$；对于数 a_{n-3}, a_{n-1}, a_n，由②可知：$a_{n-3}a_{n-1} = a_n$. ………………6分

所以 $a_{n-2} = a_{n-3}$，这与①矛盾.

所以 $2,3,5$ 不可能是数列 A_n 中的项. ………………7分

（Ⅲ）n 的最大值为 9，证明如下： ………………8分

（1）令 $A_9: -4,-2,-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{2},1,2$，则 A_9 符合①、②. ………………11分

（2）设 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geq 3)$ 符合①、②，则：

（ⅰ）A_n 中至多有三项，其绝对值大于 1.

假设 A_n 中至少有四项，其绝对值大于 1，不妨设 a_i，a_j，a_k，a_l 是 A_n 中绝对值最大的四项，其中 $1 < |a_i| \leq |a_j| \leq |a_k| \leq |a_l|$.

则对 a_i，a_k，a_l 有 $|a_i a_l| > |a_l|$，$|a_k a_l| > |a_l|$，故 $a_i a_l$，$a_k a_l$ 均不是数列 A_n 中的项，即 $a_i a_k$ 是数列 A_n 中的项.

同理：$a_j a_k$ 也是数列 A_n 中的项.

但 $|a_i a_k| > |a_k|$，$|a_j a_k| > |a_k|$.

所以 $a_i a_k = a_j a_k = a_l$.

所以 $a_i = a_j$，这与①矛盾.

（ⅱ）A_n 中至多有三项，其绝对值大于 0 且小于 1.

假设 A_n 中至少有四项，其绝对值大于 0 且小于 1，类似（ⅰ）得出矛盾.

（ⅲ）A_n 中至多有两项绝对值等于 1.

（iv）A_n 中至多有一项等于 0.

综合（i），（ii），（iii），（iv）可知 A_n 中至多有 9 项.

……………………14 分

由（1），（2）可得，n 的最大值为 9.