海淀区高三年级第二学期期中练习

数　　学（文科）

2015.4

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2=2\}$，$B=\{1,\sqrt{2},2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{\sqrt{2}\}$　　B. $\{2\}$

C. $\{-\sqrt{2},1,\sqrt{2},2\}$　　D. $\{-2,1,\sqrt{2},2\}$

2. 抛物线 $x^2=4y$ 的焦点到准线的距离为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

3. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x$，则 $f(-1)=$

A. $\frac{1}{e}$　　B. $-\frac{1}{e}$　　C. e　　D. $-$e

4. 某单位计划在下月1日至7日举办人才交流会，某人随机选择其中的连续两天参加交流会，那么他在1日至3日期间连续两天参加交流会的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

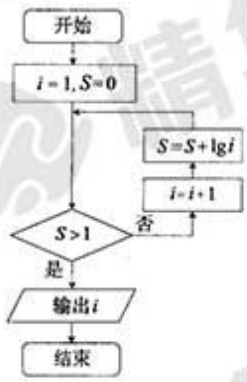
5. 执行如图所示的程序框图，输出的 i 值为

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5



6. “$\sin\alpha>0$”是“角 α 是第一象限的角”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

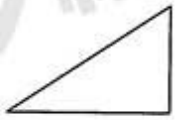
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 若 x，y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x\geqslant 1,\\ x-y\geqslant 0,\end{cases}$ 则下列不等式恒成立的是

A. $y\geqslant 1$　　B. $x\geqslant 2$

C. $x+2y\geqslant 0$　　D. $2x-y+1\geqslant 0$

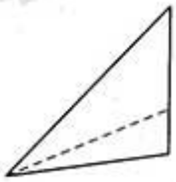
8. 某三棱锥的正视图如图所示，则下列图①②③④中，所有可能成为这个三棱锥的俯视图的是



正视图

①

②



③

④

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①②③④

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$____.

10. 若复数 $z=\frac{a+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，且 $z\in\mathbf{R}$，则实数 $a=$____.

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和. 若 $a_3=-6$，$S_1=S_5$，则公差 $d=$____；S_n 的最小值为____.

12. 对于⊙A：$x^2+y^2-2x=0$，以点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为中点的弦所在的直线方程是____.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}x,\ x<a,\\ x^2,\ x\geqslant a.\end{cases}$ 对任意实数 b，关于 x 的方程 $f(x)-b=0$ 总有实数根，则 a 的取值范围是____.

14. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，用 U 的子集可表示由 0，1 组成的 6 位字符串，如：$\{2,4\}$ 表示的是第 2 个字符为 1，第 4 个字符为 1，其余均为 0 的 6 位字符串 010100，并规定空集表示的字符串为 000000.

①若 $M=\{2,3,6\}$，则 $\complement_U M$ 表示的 6 位字符串为____；

②若 $A=\{1,3\}$，集合 $A\cup B$ 表示的字符串为 101001，则满足条件的集合 B 的个数是____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且 a_2 是 S_2 与 1 的等差中项.

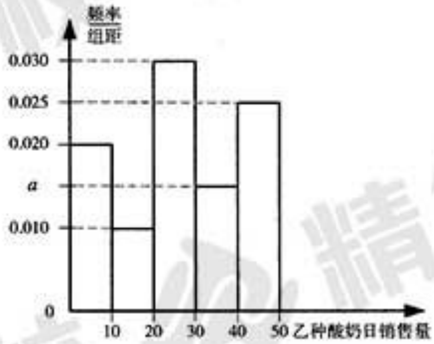
（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 n 项和为 T_n，且对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\lambda$ 恒成立，求实数 λ 的最小值.

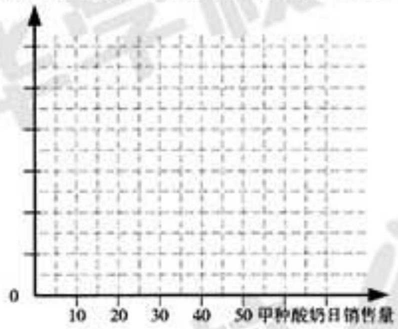
16.（本小题满分 13 分）

某超市从 2014 年甲、乙两种酸奶的日销售量（单位：箱）的数据中分别随机抽取 100 个，整理得到数据分组及频率分布表和频率分布直方图：

分组（日销售量）	频率（甲种酸奶）
[0，10]	0.10
(10，20]	0.20
(20，30]	0.30
(30，40]	0.25
(40，50]	0.15



（Ⅰ）写出频率分布直方图中 a 的值，并作出甲种酸奶日销售量的频率分布直方图；



（Ⅱ）记甲种酸奶与乙种酸奶日销售量（单位：箱）的方差分别为 s_1^2，s_2^2，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小；（只需写出结论）

（Ⅲ）假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，试估计乙种酸奶在未来一个月（按 30 天计算）的销售总量.

17. (本小题满分 13 分)

在$\triangle ABC$中，$\sin^2A=\sin B\sin C$.

(Ⅰ) 若$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，求$\angle B$的大小；

(Ⅱ) 若$bc=1$，求$\triangle ABC$的面积的最大值.

18. (本小题满分 14 分)

如图 1，在梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，$AD\perp DC$，$BC=2AD$，四边形$ABEF$是矩形. 将矩形$ABEF$沿AB折起到四边形ABE_1F_1的位置，使平面$ABE_1F_1\perp$平面$ABCD$，M为AF_1的中点，如图 2.

(Ⅰ) 求证：$BE_1\perp DC$；

(Ⅱ) 求证：$DM/\!/$平面BCE_1；

(Ⅲ) 判断直线CD与ME_1的位置关系，并说明理由.

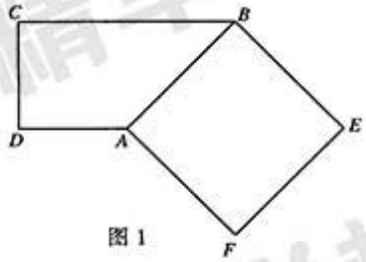


图 1

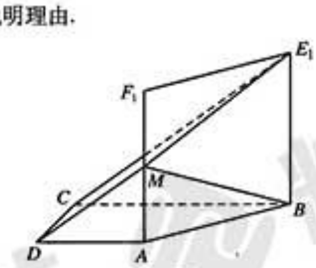


图 2

19. (本小题满分 13 分)

已知椭圆M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(0,-1)$，且离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ⅰ) 求椭圆M的方程；

(Ⅱ) 若椭圆M上存在点B，C关于直线$y=kx-1$对称，求k的所有取值构成的集合S，并证明对于$\forall k\in S$，BC的中点恒在一条定直线上.

20. (本小题满分 14 分)

已知函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}(a\neq 0)$.

(Ⅰ) 求函数$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ) 若存在两条直线$y=ax+b_1$，$y=ax+b_2(b_1\neq b_2)$都是曲线$y=f(x)$的切线，求实数a的取值范围；

(Ⅲ) 若$\{x|f(x)\leq 0\}\subseteq(0,1)$，求实数$a$的取值范围.

海淀区高三年级第二学期期中练习

数学（文）答案及评分参考 2015.4

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）A	（2）C	（3）D	（4）B
（5）C	（6）B	（7）D	（8）D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。有两空的小题，第一空 2 分，第二空 3 分）

（9）1	（10）0	（11）12；−54
（12）$y=x$	（13）$[0,1]$	（14）100110；4

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $S_2=a_1+a_2=a_1+2a_1=3a_1$. ………………1 分

因为 a_2 是 S_2 与 1 的等差中项,

所以 $2a_2=S_2+1$，即 $2\times 2a_1=3a_1+1$.

所以 $a_1=1$. ………………3 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$. ………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得：$\dfrac{1}{a_n}=(\dfrac{1}{2})^{n-1}$.

所以 $\dfrac{1}{a_1}=1$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 是以 1 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ………………9

分

所以 数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前n项和$T_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\frac{1}{2^n})$. ………………11

分

因为 $\frac{1}{2^n}>0$，

所以 $T_n=2(1-\frac{1}{2^n})<2$.

若$b<2$，当$n>\log_2(\frac{2}{2-b})$时，$T_n>b$.

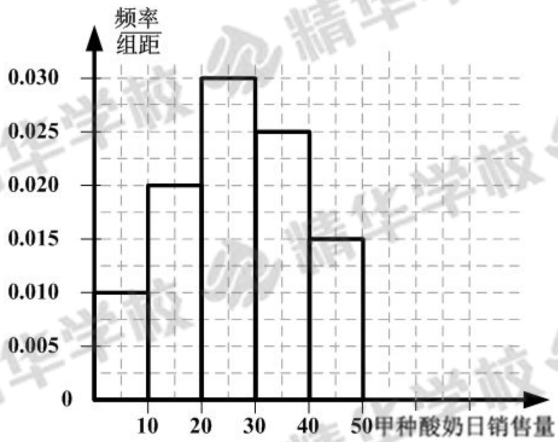
所以 若对$\forall n\in\mathbf{N}^*,T_n<\lambda$恒成立，则$\lambda\geq 2$.

所以 实数λ的最小值为2. ………………13

分

（16）（共13分）

解：（Ⅰ）$a=0.015$； ………………2
分



………………6

分

（Ⅱ）$s_1^2<s_2^2$. ………………9

分

（Ⅲ）乙种酸奶平均日销售量为：

$\bar{x}=5\times0.20+15\times0.10+25\times0.30+35\times0.15+45\times0.25=26.5$（箱）. ………………11

分

乙种酸奶未来一个月的销售总量为：$26.5\times30=795$（箱）. ………………13

分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）方法一：因为 $\sin^2A=\sin B\sin C$, 且 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以 $a^2=bc$. ………………2

分

又因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$， ………………4

分

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\times\dfrac{1}{2}=b^2+c^2-bc$.

所以 $(b-c)^2=0$.

所以 $b=c$. ………………6

分

因为 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 ΔABC 为等边三角形.

所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$. ………………7

分

方法二： 因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)$. ………………1

分

因为 $\sin B\sin C=\sin^2A$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\sin B\sin(\dfrac{\pi}{3}+B)=\sin^2\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $\sin B(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B)=\dfrac{3}{4}$. ………………3

分

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos 2B}{2}=\dfrac{3}{4}$.

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B-\dfrac{1}{2}\cos 2B=1$.

所以 $\sin(2B-\dfrac{\pi}{6})=1$. ………………5

分

因为 $B\in(0,\pi)$，

所以 $2B-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11}{6}\pi)$.

所以 $2B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$. ………………7

分

（Ⅱ）因为 $\sin^2 A=\sin B\sin C,\ bc=1$，且 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以 $a^2=bc=1$.

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-1}{2}$ ………………9

分

$\geq\dfrac{2bc-1}{2}=\dfrac{1}{2}$（当且仅当 $b=c=1$ 时，等号成立）. ………………11

分

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A\in(0,\dfrac{\pi}{3}]$.

所以 $\sin A\in(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\sin A\leq\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 当ΔABC是边长为 1 的等边三角形时，其面积取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

………………13 分

（18）（共 14 分）

证明：（Ⅰ）因为 四边形ABE_1F_1为矩形，

所以$BE_1 \perp AB$.

因为 平面$ABCD \perp$平面ABE_1F_1，且平面$ABCD \cap$平面$ABE_1F_1 = AB$，

$BE_1 \subset$平面ABE_1F_1，

所以 $BE_1 \perp$平面$ABCD$. ………………3 分

因为 $DC \subset$平面$ABCD$，

所以 $BE_1 \perp DC$. ………………5 分

（Ⅱ）证明：因为 四边形ABE_1F_1为矩形，

所以 $AM // BE_1$.

因为 $AD // BC$， $AD \cap AM = A$， $BC \cap BE_1 = B$，

所以 平面$ADM //$平面BCE_1. ………………7 分

因为 $DM \subset$平面ADM，

所以 $DM //$平面BCE_1. ………………9 分

（Ⅲ）直线CD与ME_1相交，理由如下： ………………10 分

取BC的中点P，CE_1的中点Q，连接AP，PQ，QM.

所以 $PQ//BE_1$，且 $PQ=\frac{1}{2}BE_1$.

在矩形 ABE_1F_1 中，M 为 AF_1 的中点，

所以 $AM//BE_1$，且 $AM=\frac{1}{2}BE_1$.

所以 $PQ//AM$，且 $PQ=AM$.

所以 四边形 $APQM$ 为平行四边形.

所以 $MQ//AP$，$MQ=AP$. ………………12 分

因为 四边形 $ABCD$ 为梯形， P 为 BC 的中点， $BC=2AD$，

所以 $AD//PC$，$AD=PC$.

所以 四边形 $ADCP$ 为平行四边形.

所以 $CD//AP$，且 $CD=AP$.

所以 $CD//MQ$ 且 $CD=MQ$.

所以 $CDMQ$ 是平行四边形.

所以 $DM//CQ$，即 $DM//CE_1$.

因为 $DM\neq CE_1$，

所以 四边形 DME_1C 是以 DM，CE_1 为底边的梯形.

所以 直线 CD 与 ME_1 相交. ………………14 分

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 椭圆 M 过点 $A(0,-1)$，

所以 $b=1$. ………………1 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，

所以 $a=2$.

所以 椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………3 分

（Ⅱ）方法一：

依题意得 $k\neq 0$.

因为 椭圆 M 上存在点 B,C 关于直线 $y=kx-1$ 对称，

所以 直线 BC 与直线 $y=kx-1$ 垂直，且线段 BC 的中点在直线 $y=kx-1$ 上.

设直线 BC 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+t, B(x_1,y_1), C(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=-\frac{1}{k}x+t, \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 得 $(k^2+4)x^2-8ktx+4k^2t^2-4k^2=0$. ………………5 分

由 $\Delta=64k^2t^2-4(k^2+4)(4k^2t^2-4k^2)=16k^2(4-k^2t^2+k^2)>0$，

得 $k^2t^2-k^2-4<0$.（*）

因为 $x_1+x_2=\frac{8kt}{k^2+4}$， ………………7 分

所以 BC 的中点坐标为 $(\frac{4kt}{k^2+4},\frac{k^2t}{k^2+4})$.

又线段 BC 的中点在直线 $y=kx-1$ 上，

所以 $\frac{k^2t}{k^2+4}=k\frac{4kt}{k^2+4}-1$.

所以 $\frac{3k^2t}{k^2+4}=1$. ………………9 分

代入（*），得 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $S=\{k\mid k<-\frac{\sqrt{2}}{2},或k>\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. ………………11分

因为 $\frac{k^2t}{k^2+4}=\frac{1}{3}$,

所以 对于 $\forall k\in S$，线段 BC 中点的纵坐标恒为 $\frac{1}{3}$，即线段 BC 的中点总在直线 $y=\frac{1}{3}$ 上. ………………13分

方法二：

因为 点 $A(0,-1)$ 在直线 $y=kx-1$ 上，且 B,C 关于直线 $y=kx-1$ 对称，

所以 $|AB|=|AC|$，且 $k\neq 0$.

设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$（$y_1\neq y_2$），BC 的中点为 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$.

则 ${x_1}^2+(y_1+1)^2={x_2}^2+(y_2+1)^2$. ………………6分

又 B,C 在椭圆 M 上，

所以 ${x_1}^2=4-4{y_1}^2,{x_2}^2=4-4{y_2}^2$.

所以 $4-4{y_1}^2+(y_1+1)^2=4-4{y_2}^2+(y_2+1)^2$.

化简，得 $3({y_1}^2-{y_2}^2)=2(y_1-y_2)$.

所以 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{3}$. ………………9分

又因为 BC 的中点在直线 $y=kx-1$ 上，

所以 $y_0=kx_0-1$.

所以 $x_0=\frac{4}{3k}$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$ 可得 $x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

所以 $0<\frac{4}{3k}<\frac{4\sqrt{2}}{3}$，或 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}<\frac{4}{3k}<0$，即 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $S=\{k\mid k<-\frac{\sqrt{2}}{2},或k>\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. ………………12分

所以 对于 $\forall k\in S$，线段 BC 中点的纵坐标恒为 $\frac{1}{3}$，即线段 BC 的中点总在直线 $y=\frac{1}{3}$ 上. ………………13分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}(x>0)$. ………………1分

当 $a<0$ 时， $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,+\infty)$. ………………2分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$.

当 x 变化时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\frac{1}{a})$，单调递增区间是 $(\frac{1}{a},+\infty)$. ………………4分

（Ⅱ）因为 存在两条直线 $y=ax+b_1$， $y=ax+b_2(b_1\neq b_2)$ 都是曲线 $y=f(x)$ 的切线，

所以 $f'(x)=a$ 至少有两个不等的正实根. ………………5分

令 $\frac{ax-1}{x^2}=a$ 得 $ax^2-ax+1=0$，记其两个实根分别为 x_1,x_2.

则 $\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0,\\ x_1x_2=\frac{1}{a}>0.\end{cases}$ 解得 $a>4$. ………………7 分

当 $a>4$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$ 处的切线分别为

$y=ax+f(x_1)-ax_1$， $y=ax+f(x_2)-ax_2$.

令 $F(x)=f(x)-ax(x>0)$.

由 $F'(x)=f'(x)-a=0$ 得 $x=x_1, x=x_2$（不妨设 $x_1<x_2$），且当 $x_1<x<x_2$ 时，$F'(x)>0$，即 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上是单调函数.

所以 $F(x_1)\neq F(x_2)$.

所以 $y=ax+f(x_1)-ax_1$，$y=ax+f(x_2)-ax_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的两条不同的切线.

所以 实数 a 的取值范围为 $(4,+\infty)$. ………………9 分

（III）当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的减函数.

因为 $f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}})=a\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}})+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}}=-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1<0$，

而 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}\notin(0,1)$，不符合题意. ………………11 分

当 $a>0$ 时，由（I）知：$f(x)$ 的最小值是 $f(\frac{1}{a})=-a\ln a+a=a\cdot(1-\ln a)$.

（i）若 $f(\frac{1}{a})>0$，即 $0<a<\mathrm{e}$ 时，$\{x\,|\,f(x)\le 0\}=\varnothing\subseteq(0,1)$，

所以，$0<a<\mathrm{e}$ 符合题意.

（ii）若 $f(\frac{1}{a})=0$，即 $a=\mathrm{e}$ 时，$\{x\,|\,f(x)\le 0\}=\{\frac{1}{\mathrm{e}}\}\subseteq(0,1)$.

所以，$a=\mathrm{e}$ 符合题意.

（iii）若 $f(\frac{1}{a})<0$，即 $a>\mathrm{e}$ 时，有 $0<\frac{1}{a}<1$.

因为 $f(1)=1>0$，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 内是增函数，

所以 当 $x\ge 1$ 时，$f(x)>0$.

又因为 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $\left\{x\middle|f(x)\le 0\right\}\subseteq(0,1)$.

所以 $a>\mathrm{e}$ 符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\{a\,|\,a>0\}$. ………………14

分