北京市东城区2014—2015学年度第二学期高三综合练习(一)

2015.4

数学(理科)

本试卷共5页,共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷(选择题 共40分)

一、选择题(共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项)

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x|x<-3$,或 $x>4\}$,那么 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$　　B. $\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$

2. 已知复数$\frac{a+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$为纯虚数,那么实数 $a=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

3. 在区间$[0,2]$上随机取一个实数 x,若事件"$3x-m<0$"发生的概率为$\frac{1}{6}$,则实数 $m=$

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

4. 已知点 M 的极坐标为$(5,\frac{2\pi}{3})$,那么将点 M 的极坐标化成直角坐标为

A. $(-\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2})$　　B. $(-\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2})$

C. $(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$　　D. $(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$

5. “$x<1$”是“$\log_{\frac{1}{2}}x>0$”的

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

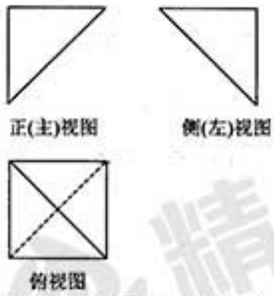
C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

6. 某学校开设“蓝天工程博览课程”，组织 6 个年级的学生外出参观包括甲博物馆在内的 6 个博物馆，每个年级任选一个博物馆参观，则有且只有两个年级选择甲博物馆的方案有

A. $A_6^2\times A_5^4$ 种　　　　B. $A_6^2\times 5^4$ 种

C. $C_6^2\times A_5^4$ 种　　　　D. $C_6^2\times 5^4$ 种

7. 一个几何体的三视图如图所示，图中直角三角形的直角边长均为 1，则该几何体的体积为



A. $\frac{1}{6}$　　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　　　D. $\frac{1}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$，$g(x)=mx$，若对于任意实数 x，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数，则实数 m 的取值范围是

A. $(0,2)$　　　　B. $(0,8)$

C. $(2,8)$　　　　D. $(-\infty,0)$

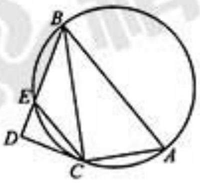
第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=8$，$S_4=12$，则$\{a_n\}$的公差 $d=$________.

10. 曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$与 x 轴围成的封闭区域的面积为________.

11. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，$AB=2AC=8$，过 C 作$\triangle ABC$ 外接圆的切线 CD，$BD\perp CD$ 于 D，BD 与外接圆交于点 E，则 $DE=$________.



12. 已知 F_1，F_2 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$ 为椭圆上一点，且 PF_2 垂直于 x 轴. 若$|F_1F_2|=2|PF_2|$，则该椭圆的离心率为________.

13. 已知函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $y=f(x-2)$的图象关于点$(2,0)$成中心对称. 若 u,v 满足不等式组$\begin{cases}f(u)+f(v-1)\leqslant 0,\\ f(u-v-1)\geqslant 0,\end{cases}$ 则 u^2+v^2 的最小值为________.

14. 已知 $x\in\mathbf{R}$，定义：$A(x)$表示不小于 x 的最小整数. 如 $A(\sqrt{3})=2$，$A(-1.2)=-1$.

若 $A(2x+1)=3$，则 x 的取值范围是________；

若 $x>0$ 且 $A(2x\cdot A(x))=5$，则 x 的取值范围是________.

三、解答题（共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

15.（本小题共 13 分）

在$\triangle ABC$ 中，$b=2$，$\cos C=\frac{3}{4}$，$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{\sqrt{7}}{4}$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求 $\sin 2A$ 值.

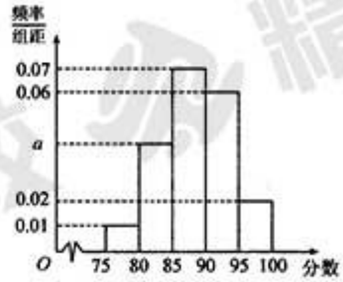
16.(本小题共 13 分)

某地区有 800 名学员参加交通法规考试,考试成绩的频率分布直方图如图所示.其中成绩分组区间是:[75,80),[80,85),[85,90),[90,95),[95,100].规定 90 分及其以上为合格.

(Ⅰ)求图中 a 的值;

(Ⅱ)根据频率分布直方图估计该地区学员交通法规考试合格的概率;

(Ⅲ)若三个人参加交通法规考试,用 X 表示这三人中考试合格的人数,求 X 的分布列与数学期望.



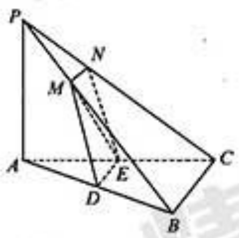
17.(本小题共 14 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$底面 ABC,$AB\perp BC$,$AB=PA=BC=2$. D,E 分别为 AB,AC 的中点,过 DE 的平面与 PB,PC 相交于点 M,N(M 与 P,B 不重合,N 与 P,C 不重合).

(Ⅰ)求证:$MN/\!/BC$;

(Ⅱ)求直线 AC 与平面 PBC 所成角的大小;

(Ⅲ)若直线 EM 与直线 AP 所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{14}}{14}$,求 MC 的长.



18.(本小题共 13 分)

已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}+\ln x,a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极值,求 a 的值;

(Ⅱ)若 $f(x)$在区间$(1,2)$上单调递增,求 a 的取值范围;

(Ⅲ)讨论函数 $g(x)=f'(x)-x$ 的零点个数.

19.（本小题共 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，动点 E 到定点 $(1,0)$ 的距离与它到直线 $x=-1$ 的距离相等.

（Ⅰ）求动点 E 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）设动直线 $l:y=kx+b$ 与曲线 C 相切于点 P，与直线 $x=-1$ 相交于点 Q.

证明：以 PQ 为直径的圆恒过 x 轴上某定点.

20.（本小题共 14 分）

在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，对于任意 $n\in \mathbf{N}^*$，都有 $a_n\in \mathbf{N}^*$，且 $a_n<a_{n+1}$. 设集合 $A_m=\{n|a_n\leqslant m,m\in \mathbf{N}^*\}$，将集合 A_m 中的元素的最大值记为 b_m，即 b_m 是数列 $\{a_n\}$ 中满足不等式 $a_n\leqslant m$ 的所有项的项数的最大值，我们称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的伴随数列.

例如：数列 $\{a_n\}$ 是 1，3，4，…，它的伴随数列 $\{b_n\}$ 是 1，1，2，3，….

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 是 1，4，5，…，请写出 $\{a_n\}$ 的伴随数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项；

（Ⅱ）设 $a_n=3^{n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$，求数列 $\{a_n\}$ 的伴随数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和；

（Ⅲ）设 $a_n=3n-2(n\in \mathbf{N}^*)$，求数列 $\{a_n\}$ 的伴随数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和 S_n.

北京市东城区2014—2015学年度第二学期高三综合练习(一)

数学(理科)参考答案

一、选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1.C 2.D 3.A 4.D 5.B 6.D 7.A 8.B

二、填空题(本大题共6小题,每小题5分,共30分)

9. -1 10. 2 11. 2 12. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 13. $\frac{1}{2}$ 14. $(\frac{1}{2},1]$ $(1,\frac{5}{4}]$

注:两个空的填空题第一个空填对得3分,第二个空填对得2分.

三、解答题(本大题共6小题,共80分)

15.(共13分)

解:(Ⅰ)因为 $\cos C=\frac{3}{4}$,且 $0<C<\pi$,

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

因为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$,

所以 $a=1$. ………………………………………… 6分

(Ⅱ)由余弦定理,$c^2=b^2+a^2-2ba\cos C$,

所以 $c=\sqrt{2}$.

由正弦定理,$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$,解得 $\sin A=\frac{\sqrt{14}}{8}$. 又 $0<A<\pi$,

所以 $\cos A=\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

所以 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. ………………………… 13分

16.(共13分)

解:(Ⅰ)由直方图知,$(0.01+0.02+0.06+0.07+a)\times 5=1$,

解得 $a=0.04$. ………………………………………… 3分

(Ⅱ)设事件 A 为"某名学员交通法规考试合格".

由直方图知,$P(A)=(0.06+0.02)\times 5=0.4$. ………………… 6分

(Ⅲ)依题意,X 的取值为0,1,2,3.

$P(X=0)=(1-0.4)^3=0.216$,

$P(X=1)=C_3^1\times 0.4\times(1-0.4)^2=0.432$,

$P(X=2)=C_3^2\times 0.4^2\times(1-0.4)=0.288$,

$P(X=3)=0.4^3=0.064$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

$E(X)=0\times 0.216+1\times 0.432+2\times 0.288+3\times 0.064=1.2$. …………… 13 分

17.(共 14 分)

(Ⅰ)证明:因为 D、E 分别为 AB、AC 的中点,

所以 $DE/\!/BC$.

因为 $BC\subset$ 平面 PBC,$DE\not\subset$ 平面 PBC,

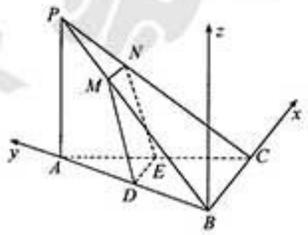
所以 $DE/\!/$ 平面 PBC.

因为平面 $DENM\cap$ 平面 $PBC=MN$,

所以 $DE/\!/MN$.

所以 $MN/\!/BC$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)解:如图,在平面 PAB 内,作 $BZ/\!/AP$,则 BA,BC,BZ 两两互相垂直,建立空间直角坐标系 $B-xyz$.



则 $B(0,0,0)$,$C(2,0,0)$,$A(0,2,0)$,$P(0,2,2)$.

$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{BP}=(0,2,2)$,$\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0.\end{cases}$

所以$\begin{cases}x=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

令 $z=-1$,得 $y=1$,$x=0$,

$\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$.

设直线 AC 与平面 PBC 所成角为 α,则

$\sin\alpha=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}>|=|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}|=\dfrac{1}{2}$. 又 $\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$,

所以直线 AC 与平面 PBC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$. ………………………………………… 10 分

(Ⅲ)解:设点 M 的坐标为 (u,v,w).

因为点 M 在棱 PB 上,所以可设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BP}(0<\lambda<1)$.

因为 $(u,v,w)=\lambda(0,2,2)$,所以 $M(0,2\lambda,2\lambda)$.

又 $E(1,1,0)$,

$\overrightarrow{EM}=(-1,2\lambda-1,2\lambda)$, $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$.

因为直线 EM 与直线 AP 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{14}}{14}$,

设直线 EM 与直线 AP 所成角为 θ,

所以 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{AP}|}\right|=\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

所以 $8\lambda^2-18\lambda+9=0$.

所以 $\lambda=\frac{3}{4}$ 或 $\lambda=\frac{3}{2}$.

因为 $0<\lambda<1$,

所以 $\lambda=\frac{3}{4}$.

所以 $M(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.

因为 $C(2,0,0)$,所以 $MC=\frac{\sqrt{34}}{2}$. ………………………………………… 14 分

18.(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x-a}{x^2}$,

由已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值,

所以 $f'(1)=0$.

解得 $a=2$,经检验 $a=2$ 时,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.

所以 $a=2$. ………………………………………… 3 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x-a}{x^2}$, $x>0$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增,

所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,2)$ 上恒成立.

即 $a\leqslant x^2+x$ 在区间 $(1,2)$ 上恒成立.

所以 $a\leqslant 2$. ………………………………………………………………………………… 8 分

(Ⅲ)因为 $g(x)=f'(x)-x$,

所以 $g(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}-x,x>0$.

令 $g(x)=0$ 得 $a=-x^3+x^2+x$.

令 $h(x)=-x^3+x^2+x,x>0$.

$h'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$.

当$x\in(0,1)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$在区间$(0,1)$上单调递增,

$x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减.

所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$.

综上:当 $a>1$ 时,函数 $g(x)$无零点,

当 $a=1$ 或 $a\leqslant 0$ 时,函数 $g(x)$有一个零点,

当 $0<a<1$ 时,函数 $g(x)$有两个零点. ……………………………… 13 分

19.(共 13 分)

解:(Ⅰ)设动点 E 的坐标为(x,y),

由抛物线定义知,动点 E 的轨迹是以$(1,0)$为焦点,$x=-1$ 为准线的抛物线.

所以动点 E 的轨迹 C 的方程为:$y^2=4x$. ……………………………………… 4 分

(Ⅱ)设直线 l 的方程为:$y=kx+b$.(显然 $k\neq 0$)

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=kx+b,\end{cases}$ 消 x 得 $ky^2-4y+4b=0$.

因为直线 l 与抛物线相切,

所以 $\Delta=16-16kb=0$,即 $b=\frac{1}{k}$.

所以直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{k}$.

令 $x=-1$,得 $y=-k+\frac{1}{k}$,

所以 $Q(-1,-k+\frac{1}{k})$.

设切点坐标 $P(x_0,y_0)$,则 $ky_0^2-4y_0+\frac{4}{k}=0$,解得 $P(\frac{1}{k^2},\frac{2}{k})$.

设 $M(m,0)$,

则$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MP}=(\frac{1}{k^2}-m)(-1-m)+\frac{2}{k}(-k+\frac{1}{k})$

$=-\frac{1}{k^2}+m-\frac{m}{k^2}+m^2+\frac{2}{k^2}-2$

$=(m-1)(\frac{1}{k^2}-m-2)$.

当 $m=1$ 时，$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MP}=0$.

所以以 PQ 为直径的圆恒过 x 轴上定点 $M(1,0)$. ………………………… 13 分

20.（共 14 分）

解：（Ⅰ）1，1，1，2，3. ………………………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）由 $a_n=3^{n-1}\leqslant m$，得 $n\leqslant 1+\log_3 m(m\in\mathbf{N}^*)$.

所以当 $1\leqslant m\leqslant 2$，$m\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_1=b_2=1$.

当 $3\leqslant m\leqslant 8$，$m\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_3=b_4=\cdots=b_8=2$.

当 $9\leqslant m\leqslant 20$，$m\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_9=b_{10}=\cdots=b_{20}=3$.

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_{20}=1\times2+2\times6+3\times12=50$. ………………………… 9 分

（Ⅲ）由 $a_n=3n-2\leqslant m$，得 $n\leqslant\frac{m+2}{3}(m\in\mathbf{N}^*)$.

因为使得 $a_n\leqslant m$ 成立的 n 的最大值为 b_m，

所以 $b_1=b_2=b_3=1$，$b_4=b_5=b_6=2$，…，$b_{3t-2}=b_{3t-1}=b_{3t}=t(t\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n=3t-2(t\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$S_n=3\times\frac{1+(t-1)}{2}(t-1)+t=\frac{3t^2-t}{2}=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)$.

当 $n=3t-1(t\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$S_n=3\times\frac{1+(t-1)}{2}(t-1)+2t=\frac{3t^2+t}{2}=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)$.

当 $n=3t(t\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$S_n=3\times\frac{1+t}{2}\times t=\frac{3(t^2+t)}{2}=\frac{1}{6}n(n+3)$.

所以 $S_n=\begin{cases}\frac{(n+1)(n+2)}{6},(n=3t-2\text{ 或 }n=3t-1,t\in\mathbf{N}^*),\\ \frac{n(n+3)}{6},(n=3t,t\in\mathbf{N}^*).\end{cases}$ ………………… 14 分